

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

FACOLTÀ DI SCIENZE

MATEMATICHE FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea

**Rappresentazione e manipolazione di
poliedri convessi per l'analisi e la
verifica di programmi**

Candidato:
Elisa Ricci

Relatore:
Prof. Roberto Bagnara

Correlatori:
Dott. Costantino Medori
Dott. Enea Zaffanella

Anno Accademico 2001/2002

Indice

1	Introduzione	6
1.1	Lo spunto iniziale	6
1.2	Lo stato dell'arte	7
1.2.1	Poliedri per l'analisi e la verifica	7
1.2.2	Poliedri chiusi e non	7
1.2.3	Le librerie preesistenti	8
1.3	La presente dissertazione	10
2	Nozioni preliminari	13
2.1	Semantica	13
2.2	Interpretazione astratta: metodi di approssimazione	16
2.2.1	Preliminari	16
2.2.2	Approssimazione di proprietà concrete di programmi mediante proprietà astratte	17
2.2.3	Connessioni di Galois	20
2.2.4	Connessioni di Galois: approssimazione di semantiche di punto fisso	24
2.2.5	Widening e narrowing: operatori per l'approssimazione di semantiche di punto fisso	28
2.3	Esempio	32
3	Poliedri convessi chiusi	36
3.1	Preliminari	36
3.2	Poliedri chiusi	45
3.2.1	Doppia rappresentazione	45
3.2.2	Omogeneizzazione di un poliedro	55
3.2.3	Teoremi di Minkowski e di Weyl	59
3.2.4	Scomposizione	72
3.2.5	Facce di un poliedro	76
3.2.6	Polare di un poliedro	83

4	L'algoritmo di N. V. Chernikova	90
4.1	Preliminari	90
4.2	Algoritmo di N. V. Chernikova	97
4.2.1	Soluzioni non negative	98
4.2.2	Soluzioni generali	102
4.2.3	Caso misto: equazioni e disequazioni	103
4.2.4	Correttezza dell'algoritmo di Chernikova	104
4.3	Sistemi minimali	111
5	Poliedri non necessariamente chiusi	118
5.1	Nozioni preliminari di topologia	118
5.2	Poliedri NNC	119
5.3	Sistemi minimali	129
6	Operazioni per l'analisi e la verifica	142
6.1	Operazioni sui poliedri	142
6.1.1	Poliedro vuoto	142
6.1.2	Test di inclusione e di uguaglianza	143
6.1.3	Poliedro limitato	143
6.1.4	Intersezione	143
6.1.5	Inviluppo poliedrale	145
6.1.6	Immagine di una trasformazione affine	147
6.1.7	Immagine inversa di una trasformazione affine	150
6.1.8	Differenza poliedrale	152
6.1.9	Widening tra due poliedri	153
6.1.10	Widening limitato	163
6.1.11	Time-elapse	165
6.1.12	Chiusura di un poliedro	167
6.2	Uso della ε -rappresentazione per le operazioni dei poliedri NNC	168
6.2.1	Intersezione	172
6.2.2	Inviluppo poliedrale	173
6.2.3	Immagine (inversa) di una trasformazione affine	174
7	Conclusione	175
7.1	Lavori correlati	175
7.2	La <i>Parma Polyhedra Library</i>	178
7.3	Epilogo	182
	Bibliografia	184

Elenco delle figure

2.1	Esempio di un programma in C++.	13
2.2	Funzione di concretizzazione.	20
2.3	Heapsort.	33
3.1	Poliedro.	48
3.2	Striscia.	51
3.3	Politopo.	52
3.4	Cono puntato nell'origine.	53
3.5	Poliedro con vertice in $A = (1, 1)^T$.	54
3.6	Triangolo rettangolo isoscele.	57
3.7	Cono individuato dall'omogeneizzazione del triangolo della Figura 3.6.	58
3.8	Il cono caratteristico di un politopo \mathcal{P} consiste nell'origine.	73
3.9	Il cono caratteristico di un cono è il cono stesso.	73
3.10	Il cono caratteristico della striscia tronca è formato dai multipli positivi del vettore \mathbf{r} e dal vettore nullo.	74
3.11	Faccia F del semispazio \mathcal{P} .	77
3.12	Reticolo formato dalle facce del poliedro dell'Esempio 3.79.	81
3.13	Polare del cono puntato della Figura 3.4.	86
5.1	Poliedro $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{R}^2$ ottenuto nell'Esempio 5.2.	120
5.2	Rettangolo aperto.	129
5.3	Esempio di un poliedro NNC.	129
5.4	Poliedro descritto nell'Esempio 5.12.	130
6.1	Poliedro involucro convesso di \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 .	147
6.2	\mathcal{P}' è l'immagine del poliedro \mathcal{P} tramite la trasformazione $x' = x + y + 1$. A sua volta, \mathcal{P} è l'immagine inversa di \mathcal{P}' tramite la trasformazione affine specificata.	150
6.3	Poliedri descritti nell'Esempio 6.13.	154
6.4	Poliedro ottenuto tramite il widening di [Hal79].	157
6.5	(a) I due poliedri \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 . (b) Il poliedro $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \nabla \mathcal{P}_2$.	161

6.6	Confronto tra le tecniche di widening proposte.	164
6.7	Poliedro $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \nabla_{\mathbf{C}} \mathcal{P}_2$	165
6.8	Poliedro $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \nearrow \mathcal{P}_2$	167
7.1	Uso di <i>bounding box</i> quando l'analisi con i poliedri è troppo costosa.	181

Elenco delle tabelle

2.1	Funzione di astrazione.	19
3.1	Doppia rappresentazione di un poliedro.	70
3.2	Tabella delle scomposizioni.	76

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Lo spunto iniziale

Tra l'inizio di ottobre 2000 e la metà di giugno 2001 si è svolto, nell'ambito del Corso di Laurea in Matematica e presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Parma, il corso denominato *Programmazione (Metodi Avanzati)*. Questo corso, tenuto dal Prof. Roberto Bagnara con la collaborazione del Dott. Enea Zaffanella, è stato seguito da Sara Bonini, Andrea Pescetti e Tatiana Zolo oltre all'estensore della presente dissertazione.

Il progetto del corso fu scelto in modo piuttosto ambizioso: sviluppo di una libreria per la rappresentazione e la manipolazione di poliedri convessi con particolare riguardo alle applicazioni di analisi e verifica di sistemi complessi (hardware, software, protocolli di comunicazione). A corso terminato, l'evoluzione della libreria è proseguita: il gruppo degli sviluppatori, partiti tre dei quattro studenti, si è arricchito della Dott.ssa Patricia Hill della *School of Computing* dell'Università di Leeds (Regno Unito). La prima versione ufficiale (0.1) della libreria, denominata *Parma Polyhedra Library*, è stata pubblicata il 24 ottobre 2001. Lo stesso gruppo ha poi pubblicato le versioni 0.2 (14 novembre 2001), 0.3 (26 febbraio 2002) e 0.4 (1 luglio 2002). La libreria è diventata, a questo punto, uno strumento di qualità professionale.

Il lavoro di tesi, che solo in parte è riportato nella presente dissertazione, ha riguardato, oltre allo sviluppo della libreria, la ricognizione e l'approfondimento delle basi teoriche che ne costituiscono il fondamento. Prima di entrare in dettaglio è opportuno definire il contesto.

1.2 Lo stato dell'arte

1.2.1 Poliedri per l'analisi e la verifica

I poliedri convessi sono sottoinsiemi di uno spazio di dimensione n limitati da un numero finito di iperpiani e quindi definiti dall'intersezione di un numero finito di semispazi, ognuno dei quali è descritto da una disequazione lineare. Un poliedro convesso di \mathbb{R}^n descrive una relazione che intercorre tra n quantità reali. L'insieme di queste relazioni è utile per la rappresentazione delle proprietà di sistemi complessi di vario tipo.

L'articolo [CH78] di P. Cousot e N. Halbwachs introduce l'uso dei poliedri convessi per risolvere, tramite l'*interpretazione astratta* [CC77], alcuni importanti problemi dell'analisi statica dei programmi: controllo a tempo di compilazione degli accessi agli array, rilevamento a tempo di compilazione degli errori di *overflow*, il calcolo delle relazioni invarianti ed il rilevamento delle variabili di induzione nei cicli di un programma. Tra le molte applicazioni dei poliedri convessi citiamo: l'analisi e la verifica di programmi scritti in linguaggi sincroni [BJT99, Hal93] e di automi ibridi lineari [HPR94, HPR97]; la verifica formale assistita dal calcolatore di sistemi concorrenti e reattivi basati su specifiche temporali [MBB⁺99]; l'inferenza di relazioni tra le dimensioni degli argomenti in un programma logico [BK97]; la parallelizzazione automatica dei linguaggi imperativi [Pug92]; l'analisi di complessità dei programmi logici [KSB97]. Dal lavoro di Cousot e Halbwachs in poi, i poliedri convessi hanno dunque giocato un ruolo importante nella comunità che applica metodi formali ai linguaggi di programmazione, testimone ne sia l'emergere di nuove applicazioni [CS01, DRS01]. Di conseguenza, diversi compiti critici, quali la verifica della correttezza di protocolli di sincronizzazione o la verifica dell'assenza di errori a tempo di esecuzione di sistemi il cui fallimento potrebbe portare a gravi danni, sono affidati a software che rappresenta e manipola i poliedri convessi.

1.2.2 Poliedri chiusi e non

In letteratura, sono tradizionalmente considerati solo i poliedri convessi topologicamente chiusi e quindi descritti tramite equazioni e disequazioni lineari *non strette*. Solo recentemente [HPR94, HPR97] sono stati considerati anche poliedri che sono *non necessariamente chiusi* (o NNC), ovvero poliedri che sono descritti da sistemi di vincoli in cui possono essere presenti anche disequazioni strette. Le disequazioni strette sono importanti, ad esempio, per rappresentare direttamente regioni temporali disgiunte: una necessità molto frequente nelle applicazioni dove intervengono protocolli di sincroniz-

zazione, interazioni asincrone e vincoli temporali. I poliedri NNC sono stati recentemente utilizzati anche per il calcolo automatico di funzioni lineari di terminazione [CS01].

1.2.3 Le librerie preesistenti

Prima della pubblicazione della *Parma Polyhedra Library* (PPL) [BRZH02b, BHRZ02] erano disponibili quattro librerie software per la manipolazione dei poliedri convessi:¹

1. Polylib 2.1, progettata e scritta da H. Le Verge e D. K. Wilde [Le 92, Wil93];
2. *PolyLib* 5.0.4, la versione successiva della libreria di Le Verge e Wilde [Loe99];
3. New Polka 1.1.3c, di B. Jeannot [Jea02];
4. la libreria per i poliedri che viene fornita con HYTECH 1.04f [HHWT97].

Tutte queste librerie, inclusa la PPL, usano la stessa tecnica base per la rappresentazione dei poliedri convessi: il metodo della *Doppia Descrizione* [MRTT53]. Questa tecnica permette di descrivere un poliedro sia tramite un sistema di vincoli, cioè di equazioni e disequazioni, sia tramite la somma di opportune combinazioni di elementi del poliedro che vengono definiti *generatori*. Tutte queste librerie, inoltre, utilizzano, grosso modo, lo stesso algoritmo per il passaggio da una rappresentazione all'altra: l'algoritmo attribuito a N. V. Chernikova [Che64, Che65, Che68] poi esteso da Le Verge [Le 92]).

Escludendo la PPL, solamente New Polka supporta i poliedri NNC. Tale supporto è però incompleto: è affetto da inefficienze evitabili e lascia all'applicazione utente il compito (non banale) della corretta interpretazione dei risultati ottenuti.

Le librerie 1 e 4 sono soggette a problemi di *overflow*; 2 e 3, invece, possono usare interi a precisione arbitraria come coefficienti. Le librerie 2 e 3 possono essere configurate in modo da usare gli interi di macchina per aumentare la velocità ma questo, naturalmente, si accompagna alla possibilità di overflow. Inoltre, 2 e (secondo quanto detto in [BF99]) 4 possono usare

¹ Consideriamo qui solo quelle librerie che forniscono i servizi richiesti dalle applicazioni di analisi statica e di verifica assistita dal calcolatore. Vi sono altre librerie per la manipolazione di poliedri convessi, quali quelle sviluppate nel campo della geometria computazionale, ma queste sono, per quanto ci risulta, inadatte agli scopi di cui sopra. Si noti inoltre che abbiamo considerato solo le librerie liberamente disponibili.

numeri di macchina in virgola mobile, risultando dunque soggette ad errori di overflow, underflow ed arrotondamento.

Nelle librerie 1–4, le matrici dei coefficienti, che costituiscono la struttura principale per rappresentare i poliedri, non possono crescere dinamicamente ed è l'applicazione utente che deve quindi specificare le loro dimensioni. La complessità dei metodi impiegati è, nel caso peggiore ed in termini di memoria occupata, esponenziale². In generale, quindi, l'applicazione utente non è in grado di fare, riguardo al dimensionamento statico delle matrici, una scelta che sia al tempo stesso pratica e sicura: utilizzando dimensioni troppo piccole si possono verificare fallimenti a tempo di esecuzione; se si eccede con le dimensioni si può sprecare memoria in misura significativa e, di nuovo, incorrere in fallimenti a tempo di esecuzione che sarebbero evitabili.

I problemi causati da errori a tempo di esecuzione quali l'overflow e l'esaurimento della memoria virtuale disponibile potrebbero essere limitati o evitati da meccanismi appropriati per il rilevamento e la gestione degli errori e dalla possibilità di ripristinare la normale esecuzione a partire da uno stato coerente del sistema. Questo richiede l'abilità di individuare il problema, rilasciando tutte le strutture dati acquisite, indipendentemente dal fatto che siano state costruite interamente o solo parzialmente,³ e di continuare la computazione con un metodo alternativo (adottando, per esempio, un'approssimazione basata sugli intervalli e non più sui poliedri).

La libreria 1 individua alcuni errori e imposta un flag di errore, mentre le librerie 3 e 4 rilevano alcuni errori, stampano un messaggio e poi falliscono. La libreria 2 rileva più errori delle precedenti, ma non ha un comportamento coerente, cioè a volte imposta un flag, mentre in altri casi stampa un messaggio d'errore e fallisce. Piuttosto drastico è l'approccio utilizzato da STeP (Stanford Temporal Prover, un dimostratore semi-automatico di formule logiche temporali) [MBB⁺99] che usa la libreria per i poliedri Polka [HPR94] di Halbwachs e Y.-E. Proy per la generazione automatica di invarianti. Il manuale per la versione più recente di STeP [BBC⁺98] spiega che questo strumento è in uno stato “*sperimentale*” e viene eseguito come processo esterno, completamente indipendente dall'ambiente STeP. L'utente può impostare tre variabili d'ambiente che controllano la memoria massima e le risorse temporali concesse al processo di calcolo dell'invariante [BBC⁺98, Section 7.3]. Se uno o più di questi limiti sono oltrepassati, la generazione di invarianti fallisce.

²Ad esempio, un ipercubo chiuso n -dimensionale ha $2n$ facce (che sono descritte da altrettanti vincoli) e 2^n vertici (che sono memorizzati individualmente in una matrice).

³La mancata deallocazione di dati dinamici è un semplice problema di spreco di memoria; la presenza e raggiungibilità di oggetti solo parzialmente costruiti (e dunque potenzialmente illegali) costituisce un problema ben più serio in quanto può condurre all'imprevedibilità del comportamento del sistema.

L'utente può anche interrompere esplicitamente la generazione di invarianti semplicemente premendo un pulsante. Questo conclude la generazione di invarianti, ma, come viene evidenziato in [BBC⁺98, pag. 95] potrebbe lasciare un processo UNIX in esecuzione che l'utente deve interrompere manualmente utilizzando il comando `kill`. Tutto sommato, questa possibilità non sembra molto allettante.

Le librerie 1–3 sono software libero (*free software*) pubblicato sotto la GNU General Public License (GPL, vedi <http://www.gnu.org/>). Pertanto, volendo porre rimedio alle limitazioni appena descritte, chiunque può liberamente usare il codice di queste librerie come base per lo sviluppo di nuovi strumenti. D'altra parte, queste librerie non forniscono una documentazione ed un codice che consentano a persone che non hanno partecipato alla loro stesura di effettuare questi miglioramenti potendo poi confidare nel risultato ottenuto. Questo sentimento di insicurezza è aggravato dalla scoperta di alcuni errori e imprecisioni nella documentazione di alcune librerie (per la descrizione di alcune di queste imprecisioni, si rimanda alla sezione 7.1). Quel che è peggio, una soluzione completa a questioni quali quella della tolleranza agli errori e l'allocazione dinamica della memoria richiedono un distacco piuttosto radicale dal codice esistente.

Da queste ragioni discende, in gran parte, la decisione di scrivere la *Parma Polyhedra Library*, che verrà brevemente descritta nella sezione 7.2.

1.3 La presente dissertazione

Per assicurare la correttezza e l'efficienza della *Parma Polyhedra Library* è stato necessario studiare in modo approfondito la teoria dei poliedri convessi e della loro rappresentazione e manipolazione mediante la tecnica della doppia descrizione. La scelta di trattare in questo lavoro di tesi la teoria su cui si basa la PPL è dovuta innanzitutto alla difficoltà di trovare un supporto teorico solido e chiaro nella letteratura che si occupa di questo argomento. Alcuni testi sono datati, altri contengono imprecisioni ed altri ancora sono di difficile reperibilità.

Abbiamo individuato numerosi testi ed articoli che illustrano gli aspetti principali dei poliedri convessi. Alcuni di questi sono piuttosto datati [Wey35, Wey50, MRTT53, Che64, Che65, Che68]. Questi articoli presentano soprattutto il concetto della doppia descrizione dei poliedri e il metodo per ottenere la rappresentazione parametrica di un poliedro, conoscendone quella implicita (e viceversa). Questi concetti sono stati ripresi successivamente in articoli, quali [Le 92, Wil93, FP96], e in testi, come [SW70, NW88]. Alcuni degli articoli più recenti contengono alcune imprecisioni che rendo-

no difficile la corretta comprensione della teoria. È stata anche studiata la parte teorica contenuta nella documentazione delle librerie preesistenti [Le 92, Wil93, Loe99, Jea02, HHWT97], individuando anche in questo caso alcuni problemi di chiarezza e di coerenza.

Inoltre, un argomento importante in questa tesi è lo studio delle diverse operazioni di widening applicate al dominio dei poliedri convessi. La prima operazione di widening sui poliedri è descritta in [CH78]. Successivamente, widening non meno precisi di quello descritto in [CH78] sono stati presentati in altri articoli. Uno di questi è descritto in [Hal79], ma fino ad ora non siamo riusciti ad ottenere una copia di questo lavoro. Questa stessa tecnica di widening è riportata anche in [Hal93, HPR94, HPR97], dove non è descritta in modo formale, e in [CC92b], dove, però, sono state trascurate alcune ipotesi fondamentali. Una tecnica di widening che fornisce risultati equivalenti a quello di [Hal79] è descritto in [SG96]: in questo lavoro, però, vengono utilizzate notazioni completamente diverse da quelle utilizzate negli altri articoli e ciò non ha facilitato il confronto con le altre tecniche. Un altro widening è stato descritto in [BJT99], ma la sua presentazione non è completamente chiara: è stato necessario chiedere ulteriori spiegazioni agli autori stessi, per capire le tecniche proposte.

In questa tesi, abbiamo anche inserito lo studio dei poliedri non necessariamente chiusi, perché la teoria che riguarda questi poliedri era piuttosto carente: solamente in [HPR94, HPR97] e in [Jea02] è racchiusa una breve descrizione dei poliedri NNC. Questo studio ha contribuito a sviluppare alcuni risultati teorici originali riguardanti proprio la rappresentazione dei poliedri NNC [BRZH02a, BRZH02b].

La presente dissertazione è suddivisa come segue.

Capitolo 2 In questo capitolo viene introdotta l'*interpretazione astratta*, una teoria dell'approssimazione discreta che può essere applicata, tra l'altro, ai possibili significati (*semantiche*) dei linguaggi di programmazione. Questa parte è stata studiata soprattutto su due articoli di P. Cousot e R. Cousot ([CC92a, CC92b]) e su [Pit00].

Capitolo 3 Da questo capitolo inizia la parte principale della tesi. Qui si sviluppa la teoria dei poliedri convessi e ne viene introdotta la *doppia rappresentazione*. Detta rappresentazione permette di descrivere i poliedri convessi sia per mezzo di un sistema di *vincoli* (equazioni e disequazioni lineari), sia tramite opportune combinazioni di elementi geometrici del poliedro che vengono detti *generatori* (punti, raggi e rette). Inoltre, vengono introdotti i concetti di facce di un poliedro e di polare di un poliedro.

Capitolo 4 In questo capitolo è presentato l'algoritmo (cosiddetto) di N. V. Chernikova e H. Le Verge che consente il passaggio da una rappresentazione dei poliedri all'altra e del quale viene dimostrata la correttezza. Vengono poi definite le nozioni di sistema minimale di vincoli e di generatori che descrivono un poliedro e viene discusso il problema della determinazione di detti sistemi.

Capitolo 5 Questo capitolo affronta il problema della trattazione dei poliedri non necessariamente chiusi (NNC), ovvero di quei poliedri convessi che si possono esprimere come congiunzioni di vincoli in cui sono ammesse le disequazioni strette. Nel capitolo ci si sofferma soprattutto sulla loro doppia rappresentazione, fornendo una soluzione innovativa al problema della minimizzazione delle rappresentazioni.

Capitolo 6 In questo capitolo vengono introdotte le operazioni sui poliedri che sono necessarie per le applicazioni di analisi e verifica dei programmi. Vengono presentate, tra le altre, le operazioni di intersezione, di involuppo poliedrale, di trasformazione affine e i test di inclusione e di uguaglianza. Viene inoltre discussa la famiglia dei *widening*, una famiglia di operazioni fondamentale per le applicazioni dell'interpretazione astratta: queste operazioni hanno lo scopo di estrapolare da una successione possibilmente infinita di poliedri una successione finita di loro approssimazioni.

Capitolo 7 Quest'ultimo capitolo presenta una breve rassegna della letteratura che tratta degli argomenti affrontati in questo lavoro, inclusi i testi e gli articoli che sono stati utili per la stesura della tesi. Vengono anche evidenziate alcune inesattezze ed imprecisioni che sono state riscontrate in alcuni lavori sull'argomento. Il capitolo descrive brevemente la *Parma Polyhedra Library*, una libreria software nuova, robusta e completa che gestisce i poliedri convessi, siano essi chiusi o no.

Capitolo 2

Nozioni preliminari

2.1 Semantica

La *semantica* di un programma descrive il suo comportamento a run-time, cioè l'insieme di tutti i suoi possibili comportamenti quando viene eseguito per tutti i possibili dati di ingresso. Svilupperemo il concetto di semantica e successive nozioni con l'aiuto dell'esempio seguente:

Esempio 2.1 *Consideriamo il frammento di programma nel linguaggio imperativo C++ presentato in Figura 2.1. Osserviamo che se alla variabile n viene inizialmente assegnato un valore intero non negativo k , allora il programma calcola la radice quadrata di k approssimata per difetto; se invece gli viene assegnato un valore negativo allora ritorna -1 .*

```
r = 0;
while (r * r <= n)
    r = r + 1;
r = r - 1;
```

Figura 2.1: Esempio di un programma in C++.

Come in [Pit00], la descrizione delle semantiche può essere fatta utilizzando la nozione di *sistema di transizione* la cui funzione è quella di interprete del linguaggio di programmazione.

Definizione 2.2 (Sistema di transizione) *Un sistema di transizione è una coppia formata da:*

- *un insieme S , i cui elementi sono chiamati configurazioni, e da*

- una relazione binaria tra gli elementi di S (con notazione infissa) che indichiamo con $\rightarrow \subseteq S \times S$.

Quindi per indicare che due elementi c e c' di S sono in relazione tramite \rightarrow , scriviamo

$$c \rightarrow c'.$$

Con $c \nrightarrow c'$ indichiamo che le due configurazioni c e c' non sono in relazione tra loro.

Inoltre, scriviamo $c \rightarrow^* c'$, quando vale

$$c = c_0 \rightarrow c_1 \rightarrow \dots \rightarrow c_n = c'$$

per qualche $c_0, \dots, c_n \in S$ con $n \geq 0$ (se $n = 0$, si ha $c = c'$).

La sequenza $c_0 \rightarrow c_1 \rightarrow \dots \rightarrow c_n$ è detta cammino del sistema di transizione da c_0 a c_n . Infine, con $c \nrightarrow^*$ indichiamo che non esiste nessun $c' \in S$ tale che $c \rightarrow c'$.

Definizione 2.3 (Sistema di transizione deterministico) Un sistema di transizione si dice deterministico se dati $c, c_1, c_2 \in S$ si ha

$$c \rightarrow c_1 \wedge c \rightarrow c_2 \implies c_1 = c_2.$$

Spesso la struttura di sistemi di transizione è corredata di altri due sottoinsiemi I e T di S i cui elementi sono chiamati *configurazioni iniziali* e *configurazioni finali*, rispettivamente. Data una coppia (i, t) con $i \in I$ e $t \in T$ il cammino $i \rightarrow^* t$ rappresenta un *run* del sistema di transizione.

La *sintassi di un linguaggio* definisce il modo in cui le varie componenti del linguaggio possono essere associate per formare istruzioni e programmi legali. Quindi se un programma è sintatticamente corretto, cioè legale, significa solo che non ci sono errori nella sua struttura e non che è corretto.

Esempio 2.4 Riprendiamo ora l'Esempio 2.1 e consideriamo la sintassi del linguaggio che abbiamo utilizzato nel programma:

Istruzioni

$$I ::= C \mid E \mid B$$

Comandi

$$C ::= v=E; \mid \text{while } (B) C;$$

Espressioni intere

$$E ::= n \mid E_1 \text{ iop } E_2$$

Espressioni booleane

$$B ::= b \mid E_1 \leq E_2$$

dove

- $n \in \mathbb{Z} \stackrel{\text{def}}{=} \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, l'insieme degli interi;
- $v \in \text{Vars}$, che rappresenta l'insieme delle variabili del programma;
- $b \in \mathbb{B} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{vero}, \mathbf{falso}\}$, l'insieme dei booleani;
- $iop \in \mathbb{Iop} \stackrel{\text{def}}{=} \{+, -, *\}$, un insieme finito fissato di operazioni binarie che restituiscono un intero.

Dopo aver introdotto la parte formale o sintattica di un linguaggio, cioè quella relativa alla sua struttura e alle regole per determinarne le componenti, riprendiamo la parte semantica che ci fornisce informazioni sul suo *significato*.

Non tutti gli aspetti e i dettagli dei possibili comportamenti di un programma durante la sua esecuzione devono essere obbligatoriamente considerati. Infatti, la manipolazione di un programma è facilitata se vengono considerate semantiche “adattate”, cioè ottenute astraendo da problemi che sono in quel contesto e in quel momento irrilevanti. Quindi non si può parlare di una semantica universale ma piuttosto di diverse semantiche più o meno precise, più o meno formali, adatte a scopi diversi. Possiamo allora individuare due classi di semantiche: le *concrete* danno un significato ad ogni punto del programma, mentre le *astratte* (o anche dette *approssimate*) possono sorvolare su aspetti non fondamentali per l'obiettivo che ci si pone. Ad esempio, l'utente di un programma potrebbe essere interessato a vederlo come una funzione che, dato un input, restituisce un output (semantica *denotazionale*):

Esempio 2.5 Consideriamo nuovamente l'Esempio 2.1 e introduciamo una nuova notazione: indichiamo con $\lambda\langle x_1, \dots, x_n \rangle.\langle y_1, \dots, y_n \rangle$, una funzione di argomenti x_1, \dots, x_n che restituisce i valori y_1, \dots, y_n . Possiamo ora definire la seguente semantica:

$$\lambda\langle n, r \rangle. \begin{cases} \langle n, \lfloor \sqrt{n} \rfloor \rangle, & \text{se } n \geq 0; \\ \langle n, -1 \rangle, & \text{se } n < 0. \end{cases}$$

2.2 Interpretazione astratta: metodi di approssimazione

2.2.1 Preliminari

Chiamiamo relazione di *quasi ordine* su un insieme S una relazione binaria \sqsubseteq che sia *riflessiva* ($\forall x \in S : x \sqsubseteq x$) e *transitiva* ($\forall x, y, z \in S : (x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq z) \implies x \sqsubseteq z$); un *ordine parziale* su S è un quasi ordine che gode anche della proprietà *antisimmetrica* ($\forall x, y \in S : (x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq x) \implies x = y$).

Data una relazione d'ordine parziale \sqsubseteq su S , si dice che \sqsubseteq^{-1} è la relazione inversa di \sqsubseteq se $x \sqsubseteq^{-1} y \iff y \sqsubseteq x$: in questo caso indichiamo con \sqsupseteq la relazione inversa. Inoltre, u è un *maggiorante* di un sottoinsieme X non vuoto di S se e solo se u è più grande o uguale a tutti gli elementi di X ($\forall x \in X : x \sqsubseteq u$); u è l'*estremo superiore* di un sottoinsieme X di S se è il più piccolo tra i maggioranti di X ($\forall x \in X : x \sqsubseteq u \wedge \forall u' \in S : (\forall x \in X : x \sqsubseteq u') \implies (u \sqsubseteq u')$). L'estremo superiore di un insieme $X \subseteq S$, se esiste, è unico e lo indichiamo con $\sqcup X$. Si definiscono in modo duale i concetti di *minorante* ed *estremo inferiore* ($\sqcap X$) di $X \subseteq S$ sostituendo \sqsubseteq con \sqsupseteq .

Un *poset* $P(\sqsubseteq)$ è una relazione d'ordine parziale \sqsubseteq su un insieme P ; un *reticolo completo* $R(\sqsubseteq, \perp, \top, \sqcup, \sqcap)$ è un poset $R(\sqsubseteq)$ tale che ogni sottoinsieme X di R ha estremo superiore $\sqcup X$ ed estremo inferiore $\sqcap X$ in R . In particolare, il *minimo* $\perp = \sqcup \emptyset = \sqcap R$ è il più piccolo elemento di R , mentre il *massimo* $\top = \sqcap \emptyset = \sqcup R$ è il più grande elemento di R . Un *ordine totale* è un ordine parziale in cui tutti gli elementi sono confrontabili due a due. Una *catena crescente* è un sottoinsieme X di P tale che \sqsubseteq è un ordine totale su X ; un *ordine parziale completo* (o *cpo*) è un poset tale che ogni sua catena crescente ha minimo. Un cpo si dice *stretto* se ha minimo.

Siano P e Q due insiemi. Si dice che una funzione $\rho : P \mapsto P$ è *idempotente* se $\rho \circ \rho = \rho$. Inoltre, una funzione $\varphi : P \mapsto Q$ è detta *iniettiva* se per ogni $y \in Q$ esiste al più un $x \in P$ tale che $\varphi(x) = y$; la funzione φ è detta *suriettiva* se per ogni $y \in Q$ esiste almeno un $x \in P$ tale che $\varphi(x) = y$. Una funzione iniettiva e suriettiva è detta *biettiva*.

Sia $P(\sqsubseteq, \sqcup)$ un poset con estremo superiore \sqcup e sia $Q(\preceq, \vee)$ un poset con estremo superiore \vee , denotiamo con $P(\sqsubseteq) \xrightarrow{m} Q(\preceq)$ l'insieme delle funzioni $\varphi \in P \mapsto Q$ *monotone*, cioè quelle funzioni per cui vale

$$\forall x \in P : \forall y \in Q : x \sqsubseteq y \implies \varphi(x) \preceq \varphi(y).$$

Con $P(\sqsubseteq) \xrightarrow{c} Q(\preceq)$ denotiamo l'insieme delle funzioni $\varphi \in P \mapsto Q$ *continue superiormente*, cioè che preservano, se esiste, l'estremo superiore delle catene crescenti: se $X \sqsubseteq P$ è una catena crescente per \sqsubseteq ed esiste $\sqcup X$

allora $\varphi(\sqcup X) = \vee \varphi(X)$. Infine con $P(\sqsubseteq) \xrightarrow{a} Q(\preceq)$ indichiamo l'insieme delle funzioni $\varphi \in P \mapsto Q$ additive, cioè se $X \subseteq P$ ed esiste $\sqcup X$ allora $\varphi(\sqcup X) = \vee \varphi(X)$.

Un *punto fisso* di $\varphi \in P \mapsto P$ è un elemento $x \in P$ tale che $\varphi(x) = x$, indichiamo con φ^\equiv l'insieme dei punti fissi di φ su P . Se esiste, il *più piccolo punto fisso* di φ , che indichiamo con $\text{lfp}(\varphi)$, è l'unico $x \in \varphi^\equiv$ tale che $\forall y \in \varphi^\equiv : x \sqsubseteq y$. Analogamente si definisce il concetto di *più grande punto fisso* $\text{gfp}(\varphi)$. Il teorema di Tarski ([Tar55]) afferma che l'insieme dei punti fissi di una funzione monotona $\varphi \in R(\sqsubseteq) \xrightarrow{m} R(\sqsubseteq)$ su un reticolo completo $R(\sqsubseteq, \perp, \top, \sqcup, \sqcap)$ è un reticolo completo per \sqsubseteq con minimo $\text{lfp}(\varphi) = \sqcap \varphi^\sqsupseteq$ e massimo $\text{gfp}(\varphi) = \sqcup \varphi^\sqsupseteq$, dove $\varphi^\sqsupseteq = \{x \in R \mid \varphi(x) \sqsubseteq x\}$ è l'insieme dei *post punti fissi* e $\varphi^\sqsupseteq = \{x \in R \mid \varphi(x) \sqsupseteq x\}$ è l'insieme dei *pre punti fissi* di φ .

2.2.2 Approssimazione di proprietà concrete di programmi mediante proprietà astratte

Seguendo lo schema introdotto in [CC92a] presentiamo ora la nozione di *interpretazione astratta*. L'interpretazione astratta è un metodo per mettere in relazione diverse semantiche: l'idea base consiste nell'approssimazione discreta di proprietà da semantiche concrete o esatte a semantiche astratte o approssimate. Il processo di astrazione consente di evidenziare, all'interno della ricca struttura che modella la semantica concreta del programma, una particolare struttura.

Esempio 2.6 (Regola dei segni)

Nelle operazioni algebriche, piuttosto che usare i numeri reali come valori concreti, un'interpretazione astratta potrebbe usare i valori astratti -1 e $+1$ per descrivere i reali non positivi e non negativi, rispettivamente. In questo caso il dominio concreto è l'insieme dei reali \mathbb{R} e il dominio astratto è l'insieme $\{-1, +1\}$. Osserviamo cosa succede applicando la regola dei segni alle usuali operazioni aritmetiche $+$ e \times per i domini suddetti:

$$\begin{array}{lll} +1 + +1 = +1 & +1 \times +1 = +1 & +1 \times -1 = -1 \\ -1 + -1 = -1 & -1 \times -1 = +1 & -1 \times +1 = -1. \end{array}$$

Si nota immediatamente che questa interpretazione astratta potrebbe fallire. Consideriamo i due esempi $(x \times x) + (y \times y)$ e $x^2 + 2 \times x \times y + y^2$. Per il primo, qualsiasi valore si assegni alle variabili x e y , il segno del risultato si può calcolare correttamente con la regola che abbiamo appena definito. Per quanto riguarda il secondo, osserviamo che è sempre un valore positivo, ma con la regola dei segni sul nostro dominio astratto, a volte non riusciamo ad

ottenere il valore $+1$: infatti, se per esempio assegniamo a x il valore 3 e ad y il valore -4 , allora si ha

$$(+1 \times +1) + (+1 \times +1 \times -1) + (-1 \times -1) = +1 + -1 + +1.$$

La nostra definizione e il nostro dominio astratto non ci permettono di proseguire in quanto non siamo in grado di valutare l'operazione $+1 + -1$. Risulta perciò necessario arricchire il dominio astratto con un ulteriore simbolo \top che non fornisce nessuna informazione significativa sull'elemento concreto approssimato. Il dominio astratto diventa l'insieme $\{-1, +1, \top\}$ e la regola dei segni oltre alle operazioni precedenti dovrà considerare anche quelle che coinvolgono il nuovo simbolo:

$$\begin{array}{lll} +1 + -1 = \top & \top + -1 = \top & \top \times +1 = \top \\ -1 + +1 = \top & -1 + \top = \top & +1 \times \top = \top \\ \top + +1 = \top & \top + \top = \top & \top \times -1 = \top \\ +1 + \top = \top & \top \times \top = \top & -1 \times \top = \top. \end{array}$$

Con questo nuovo dominio astratto, si può osservare che ogni valore reale (concreto) può essere approssimato da più valori astratti: ad esempio, -3 può essere approssimato sia da -1 che da \top . Possiamo introdurre una relazione di ordine parziale \preceq per confrontare la precisione dei valori astratti. Diciamo che un valore astratto è più preciso di un altro se ha perso meno informazioni dell'altro durante l'approssimazione del valore concreto. Per esempio, $-1 \preceq \top$ e $+1 \preceq \top$, poiché -1 e $+1$ sono più precisi di \top , mentre -1 e $+1$ non sono confrontabili perché uno non può rimpiazzare l'altro dando come risultato un'approssimazione corretta.

Il valore reale 0 può essere approssimato dai due valori astratti $+1$ e -1 con la stessa precisione: la scelta di quale valore astratto usare può dipendere dall'espressione di cui vogliamo valutare il segno. Per evitare di effettuare la scelta durante il calcolo astratto o comunque di dover esplorare tutte le possibili alternative, possiamo ancora una volta arricchire il nostro dominio astratto con il nuovo simbolo $\mathbf{0}$. Si aggiungono così altre regole:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{0} + +1 = +1 & \mathbf{0} \times +1 = \mathbf{0} \\ +1 + \mathbf{0} = +1 & +1 \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \\ \mathbf{0} + -1 = -1 & \mathbf{0} \times -1 = \mathbf{0} \\ -1 + \mathbf{0} = -1 & -1 \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \\ \mathbf{0} + \top = \top & \mathbf{0} \times \top = \mathbf{0} \\ \top + \mathbf{0} = \top & \top \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \\ \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} & \mathbf{0} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}. \end{array}$$

p^b	\emptyset	$\mathbb{Z}_<$	$\{0\}$	$\mathbb{Z}_>$	\mathbb{Z}_\leq	\mathbb{Z}_\neq	\mathbb{Z}_\geq	\mathbb{Z}
$\alpha(p^b)$	f^\sharp	-1	0	$+1$	-1	\top	$+1$	t^\sharp

Tabella 2.1: Funzione di astrazione.

Indichiamo con P^b l'insieme degli elementi che descrivono le proprietà concrete di programmi e con \preceq^b una relazione di ordine parziale su P^b che definisce la *precisione relativa*, cioè $p_1^b \preceq^b p_2^b$ significa che p_1^b e p_2^b sono proprietà del programma confrontabili e p_1^b è più precisa di p_2^b . In modo analogo, assumiamo che le proprietà astratte del programma siano rappresentate dagli elementi di un poset $P^\sharp(\preceq^\sharp)$, dove la relazione di ordine parziale \preceq^\sharp definisce la *precisione relativa* delle proprietà astratte.

I legami tra le proprietà concrete e quelle astratte sono dati da due funzioni. La *funzione di concretizzazione* $\gamma \in P^\sharp \mapsto P^b$ fornisce la semantica delle proprietà astratte: $\gamma(p^\sharp)$ è la proprietà concreta corrispondente a $p^\sharp \in P^\sharp$. La *funzione di astrazione* $\alpha \in P^b \mapsto P^\sharp$ formalizza invece la nozione di astrazione: $\alpha(p^b)$ è la migliore approssimazione astratta della proprietà concreta $p^b \in P^b$.

Esempio 2.7 (Regola dei segni) Riprendiamo l'Esempio 2.6, introducendo i concetti appena proposti.

Sia $P^b = \{\emptyset, \mathbb{Z}_<, \{0\}, \mathbb{Z}_>, \mathbb{Z}_\leq, \mathbb{Z}_\neq, \mathbb{Z}_\geq, \mathbb{Z}\}$, dove $\mathbb{Z}_< \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}$, \dots , $\mathbb{Z}_\neq \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{Z} \mid x \neq 0\}$, \dots , $\mathbb{Z}_\geq \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\}$. Per esempio, se definiamo \preceq^b come la relazione di inclusione tra due insiemi \subseteq , allora vale che $\{0\} \preceq^b \mathbb{Z}_\geq$, cioè “uguale a zero” è più preciso di “non negativo”.

L'insieme $P^\sharp = \{f^\sharp, -1, 0, +1, t^\sharp\}$ è una possibile approssimazione di P^b , dove la funzione di astrazione è rappresentata in Tabella 2.1 e la funzione di concretizzazione in Figura 2.2.

Anche dalle figure si evidenzia la perdita di informazione durante il processo di astrazione: per esempio, “strettamente positivo” può essere approssimato da “non negativo” per le proprietà di \subseteq .

Con $p_1^\sharp = \alpha(p^b)$ indichiamo che p_1^\sharp è la *migliore approssimazione* della proprietà concreta p^b sul dominio astratto P^\sharp . Se inoltre si ha che $p_1^\sharp \preceq^\sharp p_2^\sharp$, allora anche p_2^\sharp è un'approssimazione corretta di p^b , ma meno precisa di p_1^\sharp . Quindi, indichiamo con $\alpha(p^b) \preceq^\sharp p^\sharp$ la *correttezza dell'approssimazione*, cioè il fatto che p^\sharp sia un'approssimazione valida dell'informazione data da p^b , pur non conoscendone la precisione.

Analogamente, se $p_1^b = \gamma(p^\sharp)$ e $p_2^b \preceq^b p_1^b$, allora p^\sharp è anche un'approssimazione corretta della proprietà concreta p_2^b , sebbene p_2^b fornisca informazioni

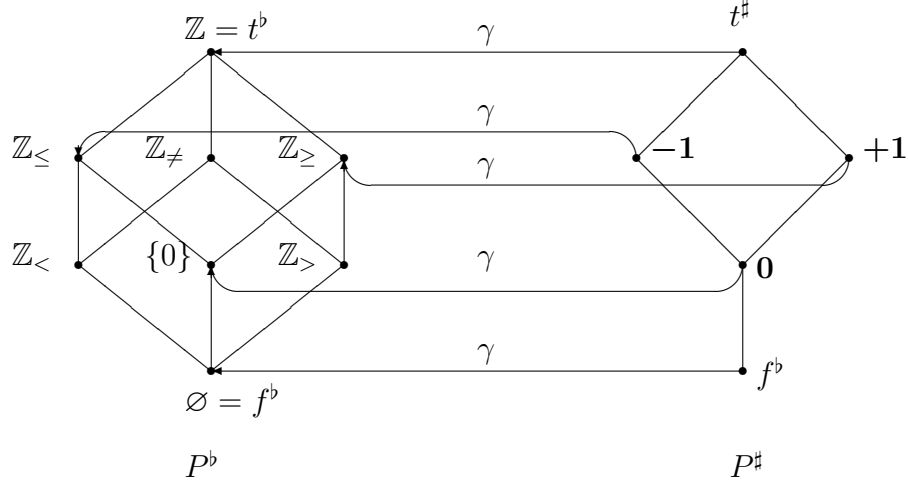


Figura 2.2: Funzione di concretizzazione.

più precise rispetto a p_1^b circa l'esecuzione del programma. Quindi, il fatto che p^\sharp sia un'approssimazione valida dell'informazione data da p^b può essere espresso anche con $p^b \preceq^b \gamma(p^\sharp)$.

2.2.3 Connessioni di Galois

Definizione 2.8 (Connessione di Galois) Siano $P^b(\preceq^b)$ e $P^\sharp(\preceq^\sharp)$ due posets. Una connessione di Galois è una coppia di funzioni

$$\begin{aligned} \alpha \in P^b &\mapsto P^\sharp \\ \gamma \in P^\sharp &\mapsto P^b \end{aligned}$$

tali che

$$\forall p^b \in P^b : \forall p^\sharp \in P^\sharp : \alpha(p^b) \preceq^\sharp p^\sharp \iff p^b \preceq^b \gamma(p^\sharp). \quad (2.1)$$

Questa viene indicata come

$$P^b(\preceq^b) \stackrel{\gamma}{\underset{\alpha}{\dashv}} P^\sharp(\preceq^\sharp).$$

Proprietà 2.9 Sia $P^b(\preceq^b) \stackrel{\gamma}{\underset{\alpha}{\dashv}} P^\sharp(\preceq^\sharp)$ una connessione di Galois. Allora

- $\gamma \circ \alpha : P^b \rightarrow P^b$ è estensiva, cioè

$$\forall p^b \in P^b : p^b \preceq^b (\gamma \circ \alpha)(p^b); \quad (2.2)$$

- $\alpha \circ \gamma: P^\sharp \rightarrow P^\sharp$ è riduttiva, cioè

$$\forall p^\sharp \in P^\sharp : (\alpha \circ \gamma)(p^\sharp) \preceq^\sharp p^\sharp. \quad (2.3)$$

DIMOSTRAZIONE: Per la proprietà riflessiva della relazione \preceq^\sharp si ha $\alpha(p^b) \preceq^\sharp \alpha(p^b)$; inoltre, per la (2.1), con $p^\sharp = \alpha(p^b)$, si ha $p^b \preceq^b (\gamma \circ \alpha)(p^b)$.

Per la proprietà riflessiva della relazione \preceq^b si ha $\gamma(p^\sharp) \preceq^b \alpha(p^\sharp)$; inoltre, per la (2.1), con $p^b = \gamma(p^\sharp)$, si ha $(\alpha \circ \gamma)(p^\sharp) \preceq^\sharp p^\sharp$. \square

La proprietà espressa nella (2.2) significa che durante il processo di astrazione si ha perdita di informazione; invece, la (2.3) mostra che il processo di concretizzazione non produce perdita di informazione.

Da queste proprietà segue che α è monotona: infatti se $p_1^b \preceq^b p_2^b$, per la (2.2) e per transitività si ha $p_1^b \preceq^b (\gamma \circ \alpha)(p_2^b)$ e quindi per la (2.1) si ha la tesi. Analogamente si dimostra che anche γ è monotona. Il fatto di avere

$$\begin{aligned} \alpha \in P^b(\preceq^b) &\xrightarrow{m} P^\sharp(\preceq^\sharp) \\ \gamma \in P^\sharp(\preceq^\sharp) &\xrightarrow{m} P^b(\preceq^b) \end{aligned} \quad (2.4)$$

mostra che i processi di astrazione e concretizzazione preservano la correttezza dell'approssimazione.

Poiché le proprietà (2.2), (2.3) e (2.4) implicano la (2.1), le connessioni di Galois possono essere definite anche nel seguente modo:

Definizione 2.10 (Connessione di Galois) *Siano $P^b(\preceq^b)$ e $P^\sharp(\preceq^\sharp)$ due posets. Allora $P^b(\preceq^b) \xrightleftharpoons[\alpha]{\gamma} P^\sharp(\preceq^\sharp)$ è una connessione di Galois se e soltanto se*

$$\begin{aligned} \alpha \in P^b(\preceq^b) &\xrightarrow{m} P^\sharp(\preceq^\sharp) \\ \gamma \in P^\sharp(\preceq^\sharp) &\xrightarrow{m} P^b(\preceq^b) \\ \forall p^b \in P^b : p^b \preceq^b (\gamma \circ \alpha)(p^b) \\ \forall p^\sharp \in P^\sharp : (\alpha \circ \gamma)(p^\sharp) \preceq^\sharp p^\sharp. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Osserviamo che vale un principio di dualità per le connessioni di Galois, cioè $P^b(\preceq^b) \xrightleftharpoons[\alpha]{\gamma} P^\sharp(\preceq^\sharp)$ se e soltanto se $P^\sharp(\preceq^{\sharp^{-1}}) \xrightleftharpoons[\gamma]{\alpha} P^b(\preceq^{b^{-1}})$.

Proprietà 2.11 *Sia $P^b(\preceq^b) \xrightleftharpoons[\alpha]{\gamma} P^\sharp(\preceq^\sharp)$ una connessione di Galois. Allora $\alpha \circ \gamma : P^\sharp \mapsto P^\sharp$ è un operatore di chiusura inferiore, cioè è una funzione monotona, riduttiva ed idempotente, mentre $\gamma \circ \alpha : P^b \mapsto P^b$ è un operatore di chiusura superiore, cioè è una funzione monotona, estensiva ed idempotente.*

DIMOSTRAZIONE: Sappiamo che α e γ sono funzioni monotone e quindi $\alpha \circ \gamma$ e $\gamma \circ \alpha$ sono anch'esse monotone. Inoltre abbiamo già dimostrato che $\alpha \circ \gamma$ è riduttiva, mentre $\gamma \circ \alpha$ è estensiva. Ora osserviamo che per ogni $p^b \in P^b$ e per ogni $p^\# \in P^\#$, per la proprietà (2.3) $(\alpha \circ \gamma)(p^\#) \preceq^\# p^\#$ e quindi $(\gamma \circ \alpha \circ \gamma)(p^\#) \preceq^\# \gamma(p^\#)$ per la monotonia. Inoltre, per la proprietà (2.2), $\gamma(p^\#) \preceq^\# (\gamma \circ \alpha \circ \gamma)(p^\#)$ dove con $p^b = \gamma(p^\#)$. Per l'antisimmetria possiamo concludere che

$$\forall p^\# \in P^\# : (\gamma \circ \alpha \circ \gamma)(p^\#) = \gamma(p^\#). \quad (2.6)$$

In modo analogo si dimostra che

$$\forall p^b \in P^b : (\alpha \circ \gamma \circ \alpha)(p^b) = \alpha(p^b). \quad (2.7)$$

□

L'idempotenza implica che la perdita di informazione dovuta al processo di approssimazione avviene tutta in un solo passo: due successive astrazioni con la stessa funzione di astrazione sono equivalenti ad una singola astrazione. Un'altra conseguenza è che si può lavorare con l'interpretazione astratta usando solo P^b e l'immagine di P^b tramite l'operatore di chiusura $\gamma \circ \alpha$ invece di utilizzare $P^\#$.

Proposizione 2.12 *Se $P^b(\preceq^b) \xrightarrow[\alpha_1]{\gamma_1} P^\#(\preceq^\#)$ e $P^b(\preceq^b) \xrightarrow[\alpha_2]{\gamma_2} P^\#(\preceq^\#)$, allora $\alpha_1 = \alpha_2$ se e solo se $\gamma_1 = \gamma_2$.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $\alpha_1 = \alpha_2$ e $p^\#$ un generico elemento di $P^\#$. Dalla (2.3) segue che $(\alpha_2 \circ \gamma_2)(p^\#) \preceq^\# p^\#$ e dall'ipotesi che $(\alpha_1 \circ \gamma_2)(p^\#) \preceq^\# p^\#$; inoltre, per la (2.1), $\gamma_2(p^\#) \preceq^b \gamma_1(p^\#)$. Allo stesso modo, si ha $(\alpha_1 \circ \gamma_1)(p^\#) \preceq^\# p^\#$ e $(\alpha_2 \circ \gamma_1)(p^\#) \preceq^\# p^\#$ dalla (2.3) e dall'ipotesi e $\gamma_1(p^\#) \preceq^b \gamma_2(p^\#)$ per la (2.1). Per l'antisimmetria possiamo concludere che $\gamma_1(p^\#) = \gamma_2(p^\#)$.

Il viceversa segue dal principio di dualità. □

La conseguenza pratica di questo fatto è che si può utilizzare un'interpretazione astratta definendo, indifferentemente, la funzione di astrazione o quella di concretizzazione, poiché, data una delle due, l'altra è univocamente determinata. Vale infatti la seguente proposizione.

Proposizione 2.13 *Se $P^b(\preceq^b) \xrightarrow[\alpha]{\gamma} P^\#(\preceq^\#)$, allora, per ogni $p^b \in P^b$, $\alpha(p^b)$ è uguale all'estremo inferiore $\bigwedge^\# \{ p^\# \in P^\# \mid p^b \preceq^b \gamma(p^\#) \}$ dell'immagine inversa tramite γ dell'insieme dei maggioranti di p^b .*

Per ogni $p^\# \in P^\#$ si ha $\gamma(p^\#) = \bigvee^b \{ p^b \in P^b \mid \alpha(p^b) \preceq^\# p^\# \}$.

DIMOSTRAZIONE: Se $p^b \preceq^b \gamma(p^\sharp)$, allora $\alpha(p^b) \preceq^\sharp p^\sharp$ per la (2.1) e quindi $\alpha(p^b)$ è un minorante dell'insieme $\{p^\sharp \in P^\sharp \mid p^b \preceq^b \gamma(p^\sharp)\}$. Inoltre, per la (2.2) si ha che $p^b \preceq^b (\gamma \circ \alpha)(p^b)$ e quindi $\alpha(p^b)$ appartiene a $\{p^\sharp \in P^\sharp \mid p^b \preceq^b \gamma(p^\sharp)\}$. Segue che $\alpha(p^b)$ è l'estremo inferiore di $\{p^\sharp \in P^\sharp \mid p^b \preceq^b \gamma(p^\sharp)\}$.

Per la dualità si dimostra il risultato per γ . \square

Proposizione 2.14 *Se $P^b(\preceq^b) \xrightarrow[\alpha]{\gamma} P^\sharp(\preceq^\sharp)$, allora $\alpha \in P^b(\vee^b) \xrightarrow{a} P^\sharp(\vee^\sharp)$ preserva gli estremi superiori e $\gamma \in P^\sharp(\wedge^\sharp) \xrightarrow{a} P^b(\wedge^b)$ preserva gli estremi inferiori.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $X \subseteq P^b$ tale che esista $\vee^b X$. Per ogni $x \in X$, per definizione di estremo superiore, si ha $x \preceq^b \vee^b X$ e quindi, per la monotonia, $\alpha(x) \preceq^\sharp \alpha(\vee^b X)$, mostrando così che $\alpha(\vee^b X)$ è un maggiorante di $\alpha(x)$. Sia ℓ un altro maggiorante di $\alpha(x)$, per ogni $x \in X$; si ha $\alpha(x) \preceq^\sharp \ell$ e quindi, per la (2.1), $x \preceq^b \gamma(\ell)$ da cui $\vee^b X \preceq^b \gamma(\ell)$ per la definizione di estremo superiore. Per la monotonia e la (2.3), si ha $\alpha(\vee^b X) \preceq^\sharp (\alpha \circ \gamma)(\ell) \preceq^\sharp \ell$, dimostrando così che $\alpha(\vee^b X)$ è l'estremo superiore di $\{\alpha(x) \mid x \in X\}$.

Per il principio di dualità segue che $\forall X \subseteq P^\sharp : \gamma(\wedge^\sharp X) = \wedge^b \{\gamma(x) \mid x \in X\}$, quando esiste $\wedge^\sharp X$. \square

Proposizione 2.15 *Siano $P^b(\preceq^b)$ e $P^\sharp(\preceq^\sharp)$ due posets.*

Se $\alpha \in P^b(\vee^b) \xrightarrow{a} P^\sharp(\vee^\sharp)$ e per ogni $p^\sharp \in P^\sharp$ esiste $\vee^b \{p^b \mid \alpha(p^b) \preceq^\sharp p^\sharp\}$, allora $P^b(\preceq^b) \xrightarrow[\alpha]{\gamma} P^\sharp(\preceq^\sharp)$ dove $\forall p^\sharp \in P^\sharp : \gamma(p^\sharp) = \vee^b \{p^b \mid \alpha(p^b) \preceq^\sharp p^\sharp\}$.

Se $\gamma \in P^\sharp(\wedge^\sharp) \xrightarrow{a} P^b(\wedge^b)$ e per ogni $p^b \in P^b$ esiste $\wedge^\sharp \{p^\sharp \mid p^b \preceq^b \gamma(p^\sharp)\}$, allora $P^b(\preceq^b) \xrightarrow[\alpha]{\gamma} P^\sharp(\preceq^\sharp)$ dove $\forall p^b \in P^b : \alpha(p^b) = \wedge^\sharp \{p^\sharp \mid p^b \preceq^b \gamma(p^\sharp)\}$.

DIMOSTRAZIONE: Se $\alpha(p^b) \preceq^\sharp p^\sharp$, allora $p^b \in \{q^b \in P^b \mid \alpha(q^b) \preceq^\sharp p^\sharp\}$, quindi, per definizione di estremo superiore e di γ , $p^b \preceq^b \vee^b \{q^b \in P^b \mid \alpha(q^b) \preceq^\sharp p^\sharp\} = \gamma(p^\sharp)$. Reciprocamente, se $p^b \preceq^b \gamma(p^\sharp)$ allora, per definizione di γ e per la monotonia, $\alpha(p^b) \preceq^\sharp \alpha(\vee^b \{q^b \in P^b \mid \alpha(q^b) \preceq^\sharp p^\sharp\})$, che è uguale a $\vee^\sharp \{\alpha(q^b) \mid \alpha(q^b) \preceq^\sharp p^\sharp\}$ poiché α preserva gli estremi superiori. Si dimostra così che $\alpha(p^b) \preceq^\sharp p^\sharp$ per definizione di estremo superiore e per transitività.

Per il principio di dualità vale il risultato per γ . \square

Proposizione 2.16 *Se $P^b(\preceq^b) \xrightarrow[\alpha]{\gamma} P^\sharp(\preceq^\sharp)$, allora α è suriettiva se e solo se γ è iniettiva se e solo se $\forall p^\sharp \in P^\sharp : (\alpha \circ \gamma)(p^\sharp) = p^\sharp$. In questo caso la connessione di Galois è detta suriezione.*

α è iniettiva se e solo se γ è suriettiva se e solo se $\forall p^b \in P^b : (\gamma \circ \alpha)(p^b) = p^b$. In questo caso la connessione di Galois è detta iniezione.

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo α iniettiva. Dalla (2.7) segue che $(\gamma \circ \alpha)(p^b) = p^b$ per ogni $p^b \in P^b$ e, scegliendo $p^\sharp = \alpha(p^b)$, si ha $p^b = \gamma(p^\sharp)$, cioè che γ è suriettiva.

Viceversa, supponiamo γ iniettiva. Dalla (2.6) segue che $p^\sharp = (\alpha \circ \gamma)(p^\sharp)$ e, scegliendo $p^b = \gamma(p^\sharp)$, si ha $p^\sharp = \alpha(p^b)$, cioè che α è suriettiva.

La seconda parte della proposizione segue dal principio di dualità. \square

Quest'ultima proposizione conduce alla definizione di *suriezione di Galois*:

Definizione 2.17 (Suriezione di Galois) *Se $P^b(\preceq^b) \xrightarrow[\alpha]{\gamma} P^\sharp(\preceq^\sharp)$ è tale che $\forall p^\sharp \in P^\sharp : (\alpha \circ \gamma)(p^\sharp) = p^\sharp$, allora è detta suriezione di Galois e si indica con $P^b(\preceq^b) \xrightarrow[\alpha]{\gamma} P^\sharp(\preceq^\sharp)$.*

2.2.4 Connessioni di Galois: approssimazione di semantiche di punto fisso

Assumiamo che la semantica concreta di un programma sia definita come il più piccolo punto fisso $\text{lfp}(F^b) = \bigsqcup_{n \geq 0} F^{b^n}(\perp^b)$, dove $X = F^b(X)$ è un'equazione o un sistema di equazioni associato al programma, $P^b(\sqsubseteq^b, \perp^b, \bigsqcup^b)$ è un poset formato dalle proprietà concrete del programma e $F^b \in P^b(\sqsubseteq^b) \xrightarrow{c} P^b(\sqsubseteq^b)$ è una funzione continua. Supponiamo inoltre che esista l'estremo superiore di $F^{b^n}(\perp^b)$, con $n \geq 0$, per esempio perché $P^b(\sqsubseteq^b, \perp^b, \bigsqcup^b)$ è un cpo stretto.

Su P^b (o su P^\sharp) vi sono due ordinamenti parziali che in generale sono distinti, ma potrebbero anche coincidere: \sqsubseteq^b è chiamato *ordinamento computazionale* e vale tra le iterazioni $F^{b^n}(\perp^b)$ durante il calcolo del punto fisso, mentre \preceq^b è detto *ordinamento di approssimazione* e specifica la precisione relativa delle proprietà concrete del programma.

Ora vediamo come calcolare e approssimare superiormente la semantica astratta $\alpha(\text{lfp}(F^b))$ del programma, tramite la relazione \preceq^\sharp .

Come ottenere un punto fisso usando le connessioni di Galois

Proposizione 2.18 *Siano $P^b(\sqsubseteq^b, \sqcup^b)$ e $P^\sharp(\sqsubseteq^\sharp, \sqcup^\sharp)$ due posets, $P^b(\preceq^b) \xrightarrow[\alpha]{\gamma} P^\sharp(\preceq^\sharp)$, $F^b \in P^b \mapsto P^b$ tale che $\text{lfp}(F^b) = \bigsqcup_{n \geq 0}^b F^{b^n}(\perp^b)$, $\perp^\sharp = \alpha(\perp^b)$, $F^\sharp \in P^\sharp \mapsto P^\sharp$ tale che $\alpha \circ F^b = F^\sharp \circ \alpha$ (che deriva da $F^\sharp = \alpha \circ F^b \circ \gamma$ e $\forall p^b \in P^b : (\gamma \circ \alpha)(p^b) = p^\sharp$). Allora $\alpha(\text{lfp}(F^b)) = \bigsqcup_{n \geq 0}^\sharp F^{\sharp^n}(\perp^\sharp)$ e $\bigsqcup_{n \geq 0}^\sharp F^{\sharp^n}(\perp^\sharp)$ è punto fisso di F^\sharp .*

Inoltre, quando $F^\sharp \in P^\sharp(\sqsubseteq^\sharp) \xrightarrow{m} P^\sharp(\sqsubseteq^\sharp)$ è monotona, $\bigsqcup_{n \geq 0}^\sharp F^{\sharp^n}(\perp^\sharp)$ è maggiore o uguale a \perp^\sharp .

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo $\text{lfp}(F^b)$ ottenuto come il limite della sequenza di iterazioni

$$\begin{aligned} F^{b^0}(\perp^b) &= \perp^b, \\ F^{b^1}(\perp^b) &= F^b(\perp^b), \dots, \\ F^{b^{n+1}}(\perp^b) &= F^b(F^{b^n}(\perp^b)), \dots, \\ F^{b^\omega}(\perp^b) &= \bigsqcup_{n \geq 0}^b F^{b^n}(\perp^b) = \text{lfp}(F^b), \end{aligned}$$

dove con ω indichiamo la cardinalità di un insieme equipotente a \mathbb{N} . Calcolando l'immagine astratta della precedente sequenza di iterazioni otteniamo $\alpha(\text{lfp}(F^b))$, cioè

$$\begin{aligned} \alpha(F^{b^0}(\perp^b)) &= \alpha(\perp^b), \\ \alpha(F^{b^1}(\perp^b)) &= \alpha(F^b(\perp^b)), \dots, \\ \alpha(F^{b^{n+1}}(\perp^b)) &= \alpha(F^b(F^{b^n}(\perp^b))), \dots, \\ \alpha(F^{b^\omega}(\perp^b)) &= \alpha\left(\bigsqcup_{n \geq 0}^b F^{b^n}(\perp^b)\right) = \alpha(\text{lfp}(F^b)). \end{aligned}$$

Poiché, in generale, il calcolo deve essere fatto interamente nell'insieme delle proprietà astratte P^\sharp , dimostriamo come ottenere la sequenza di iterazioni con il minimo astratto \perp^\sharp , l'operatore astratto F^\sharp e l'estremo superiore

astratto \sqcup^\sharp su P^\sharp , cioè la sequenza

$$\begin{aligned} F^{\sharp 0}(\perp^\sharp) &= \perp^\sharp, \\ F^{\sharp 1}(\perp^\sharp) &= F^\sharp(\perp^\sharp), \dots, \\ F^{\sharp n+1}(\perp^\sharp) &= F^\sharp(F^{\sharp n}(\perp^\sharp)), \dots, \\ F^{\sharp \omega}(\perp^\sharp) &= \bigsqcup_{n \geq 0}^\sharp F^{\sharp n}(\perp^\sharp). \end{aligned}$$

Questo è possibile se $F^{\sharp n}(\perp^\sharp) = \alpha(F^{b^n}(\perp^b))$ per ogni $n = 0, \dots, \omega$: lo dimostriamo per induzione.

Per $n = 0$, $\alpha(\perp^b) = \perp^\sharp$, per la definizione di \perp^\sharp .

Per $n \geq 0$, sia $\alpha(F^{b^n}(\perp^b)) = F^{\sharp n}(\perp^\sharp)$ l'ipotesi induttiva, dimostriamo che $\alpha(F^{b^{n+1}}(\perp^b)) = F^{\sharp n+1}(\perp^\sharp)$. La tesi coincide con $\alpha(F^b(F^{b^n}(\perp^b))) = F^\sharp(F^{\sharp n}(\perp^\sharp))$ per la definizione della sequenza di iterazioni. Usando l'ipotesi induttiva, l'ultima uguaglianza può essere riscritta come $\alpha(F^b(F^{b^n}(\perp^b))) = F^\sharp(\alpha(F^{b^n}(\perp^b)))$ e questo vale quando $\forall p^b \in P^b : \alpha(F^b(p^b)) = F^\sharp(\alpha(p^b))$ o $F^\sharp = \alpha \circ F^b \circ \gamma$ e $\forall p^b \in P^b : (\gamma \circ \alpha)(p^b) = p^b$, dove il p^b considerato è in questo caso $F^{b^n}(\perp^b)$.

Infine, sia $n = \omega$. Dimostriamo che, data l'ipotesi induttiva $\forall n \geq 0 : \alpha(F^{b^n}(\perp^b)) = F^{\sharp n}(\perp^\sharp)$, allora $\alpha(\bigsqcup_{n \geq 0}^b F^{b^n}(\perp^b)) = \bigsqcup_{n \geq 0}^\sharp F^{\sharp n}(\perp^\sharp)$. Ma questo è vero poiché $\bigsqcup_{n \geq 0}^\sharp \alpha(F^{b^n}(\perp^b)) = \bigsqcup_{n \geq 0}^\sharp F^{\sharp n}(\perp^\sharp)$ per l'ipotesi induttiva. Inoltre α conserva gli estremi superiori per la Proposizione 2.14 e cioè $\bigsqcup_{n \geq 0}^\sharp \alpha(F^{b^n}(\perp^b)) = \alpha(\bigsqcup_{n \geq 0}^b F^{b^n}(\perp^b))$. Si può quindi concludere per transitività.

Inoltre, se p^b è un punto fisso di F^b , cioè $F^b(p^b) = p^b$, allora $\alpha(F^b(p^b)) = \alpha(p^b)$ e $F^\sharp(\alpha(p^b)) = \alpha(p^b)$ poiché $\alpha \circ F^b = F^\sharp \circ \alpha$, dimostrando che $\alpha(p^b)$ è un punto fisso di F^\sharp . In particolare, $\alpha(\bigsqcup_{n \geq 0}^b F^{b^n}(\perp^b)) = \bigsqcup_{n \geq 0}^\sharp F^{\sharp n}(\perp^\sharp)$ è un punto fisso di F^\sharp .

Supponiamo ora che $F^\sharp \in P^\sharp(\sqsubseteq^\sharp) \xrightarrow{m} P^\sharp(\sqsubseteq^\sharp)$ sia monotona e sia p^\sharp un punto fisso di F^\sharp tale che $\perp^\sharp \sqsubseteq^\sharp p^\sharp$. Osserviamo che $F^{\sharp 0}(\perp^\sharp) = \perp^\sharp \sqsubseteq^\sharp p^\sharp$. Se $F^{\sharp n}(\perp^\sharp) \sqsubseteq^\sharp p^\sharp$, allora $F^{\sharp n+1}(\perp^\sharp) = F^\sharp(F^{\sharp n}(\perp^\sharp)) \sqsubseteq^\sharp F^\sharp(p^\sharp) = p^\sharp$ per monotonia e per la proprietà del punto fisso. Se $\forall n \geq 0 : F^{\sharp n}(\perp^\sharp) \sqsubseteq^\sharp p^\sharp$ allora $\bigsqcup_{n \geq 0}^\sharp F^{\sharp n}(\perp^\sharp) \sqsubseteq^\sharp p^\sharp$ per definizione di estremo superiore. Si dimostra perciò che $\bigsqcup_{n \geq 0}^\sharp F^{\sharp n}(\perp^\sharp)$ è il più piccolo punto fisso di F^\sharp maggiore o uguale a \perp^\sharp . \square

Astrazione di un punto fisso usando le connessioni di Galois

In generale, l'astrazione del punto fisso concreto non è calcolabile nel modo descritto ed occorre accontentarsi di una sua approssimazione superiore.

Proposizione 2.19 (Astrazione di punto fisso) *Consideriamo due reticoli completi $P^b(\preceq^b, f^b, t^b, \wedge^b, \vee^b)$ e $P^\sharp(\preceq^\sharp, f^\sharp, t^\sharp, \wedge^\sharp, \vee^\sharp)$, $P^b(\preceq^b) \xrightarrow[\alpha]{\gamma} P^\sharp(\preceq^\sharp)$ e $F^b \in P^b(\preceq^b) \xrightarrow{m} P^b(\preceq^b)$. Allora $\alpha(\text{lfp}(F^b)) \preceq^\sharp \text{lfp}(\alpha \circ F^b \circ \gamma)$*

DIMOSTRAZIONE: Per il teorema del punto fisso di Tarski, esiste il più piccolo punto fisso. Prendiamo $p^\sharp = \text{lfp}(\alpha \circ F^b \circ \gamma)$, cioè $p^\sharp = (\alpha \circ F^b \circ \gamma)(p^\sharp)$. Per la (2.1) si ha $(F^b \circ \gamma)(p^\sharp) \preceq^b \gamma(p^\sharp)$: segue che $\gamma(p^\sharp)$ è un post punto fisso di F^b e quindi, dal teorema di Tarski, $\text{lfp}(F^b) \preceq^b \gamma(p^\sharp)$ o, equivalentemente, $\alpha(\text{lfp}(F^b)) \preceq^\sharp p^\sharp = \text{lfp}(\alpha \circ F^b \circ \gamma)$. \square

Una conseguenza di questa proposizione è che la scelta della semantica concreta F^b e dell'astrazione $P^b(\preceq^b) \xrightarrow[\alpha]{\gamma} P^\sharp(\preceq^\sharp)$ di proprietà del programma determina completamente la semantica astratta $\text{lfp}(\alpha \circ F^b \circ \gamma)$. Quindi la semantica astratta può essere ottenuta dalla semantica concreta direttamente semplificando $\alpha \circ F^b \circ \gamma$ in modo da utilizzare solamente operatori sulle proprietà astratte. In pochi casi questa semplificazione non può essere codificata tramite un algoritmo e deve perciò essere fatta a mano. La semplificazione è facilitata dall'osservazione che $\alpha \circ F^b \circ \gamma$ può essere approssimata da sopra tramite F^\sharp in modo tale che $\forall p^\sharp \in P^\sharp : (\alpha \circ F^b \circ \gamma)(p^\sharp) \preceq^\sharp F^\sharp(p^\sharp)$:

Proposizione 2.20 (Approssimazione di punto fisso) *Consideriamo un reticolo completo $P^\sharp(\preceq^\sharp, f^\sharp, t^\sharp, \wedge^\sharp, \vee^\sharp)$, e $F^\sharp, \bar{F}^\sharp \in P^\sharp(\preceq^\sharp) \xrightarrow{m} P^\sharp(\preceq^\sharp)$ tali che $F^\sharp \preceq^\sharp \bar{F}^\sharp$. Allora $\text{lfp}(F^\sharp) \preceq^\sharp \text{lfp}(\bar{F}^\sharp)$.*

DIMOSTRAZIONE: Dalle ipotesi segue che $F^\sharp(\text{lfp}(\bar{F}^\sharp)) \preceq^\sharp \bar{F}^\sharp(\text{lfp}(\bar{F}^\sharp)) = \text{lfp}(\bar{F}^\sharp)$, e quindi $\text{lfp}(F^\sharp) \preceq^\sharp \text{lfp}(\bar{F}^\sharp)$ poiché $\text{lfp}(F^\sharp) = \bigwedge^\sharp \{ X \mid F^\sharp(X) \preceq^\sharp X \}$ per il teorema di Tarski. \square

Consideriamo ora una variante della Proposizione 2.19 basata sull'idea che in generale l'ordinamento computazionale e quello di approssimazione sono distinti:

Proposizione 2.21 (Approssimazione dell'astrazione di punto fisso) *Consideriamo $P^b(\sqsubseteq^b, \perp^b, \sqcup^b)$ e $P^\sharp(\sqsubseteq^\sharp, \perp^\sharp, \sqcup^\sharp)$ due cpo, $F^b \in P^b(\sqsubseteq^b, \sqcup^b) \xrightarrow{c} P^b(\sqsubseteq^b, \sqcup^b)$, $F^b \in P^b(\preceq^b) \xrightarrow{m} P^b(\preceq^b)$, $F^\sharp \in P^\sharp(\sqsubseteq^\sharp, \sqcup^\sharp) \xrightarrow{c} P^\sharp(\sqsubseteq^\sharp, \sqcup^\sharp)$, $P^b(\preceq^b) \xrightarrow[\alpha]{\gamma} P^\sharp(\preceq^\sharp)$, $\alpha(\perp^b) \preceq^\sharp \perp^\sharp$, $\forall p^\sharp \in P^\sharp : (\alpha \circ F^b \circ \gamma)(p^\sharp) \preceq^\sharp F^\sharp(p^\sharp)$ e per ogni*

catena \sqsubseteq^b -crescente p_i^b ($i \in \mathbb{N}$) e ogni catena $\sqsubseteq^\#$ -crescente $p_i^\#$ ($i \in \mathbb{N}$) tale che $\forall i \in \mathbb{N} : \alpha(p_i^b) \preceq^\# p_i^\#$ si ha $\alpha\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} p_i^b\right) \preceq^\# \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} p_i^\#$. Allora $\alpha(\text{lfp}(F^b)) \preceq^\# \text{lfp}(F^\#)$.

DIMOSTRAZIONE: Dimostriamo questa proposizione utilizzando l'induzione. Per $n = 0$, abbiamo $\alpha(F^{b^0}(\perp^b)) \preceq^\# F^{\#0}(\perp^\#)$, perché $\alpha(\perp^b) \preceq^\# \perp^\#$. Sia ora $n \geq 0$: supponiamo che la proposizione valga per n e dimostriamo che vale anche per $n + 1$. Per ipotesi induttiva sappiamo che $\alpha(F^{b^n}(\perp^b)) \preceq^\# F^{\#n}(\perp^\#)$ e quindi $F^{b^n}(\perp^b) \preceq^b \gamma(F^{\#n}(\perp^\#))$ per la (2.1). Per monotonia e per ipotesi abbiamo $(\alpha \circ F^b \circ F^{b^n})(\perp^b) \preceq^\# (\alpha \circ F^b \circ \gamma)(F^{\#n}(\perp^\#)) \preceq^\# F^\#(F^{\#n}(\perp^\#))$ da cui $\alpha(F^{b^{n+1}}(\perp^b)) \preceq^\# F^{\#n+1}(\perp^\#)$. Infine, per la continuità e per l'ultima ipotesi della proposizione, possiamo concludere che $\alpha(\text{lfp}(F^b)) = \alpha\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} F^{b^n}(\perp^b)\right) \preceq^\# \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} F^{\#n}(\perp^\#) = \text{lfp}(F^\#)$. \square

Quando, invece, l'ordinamento computazionale e quello di approssimazione coincidono, questa proposizione può essere semplificata nella seguente:

Proposizione 2.22 *Siano $P^b(\preceq^b, f^b, \vee^b)$ e $P^\#(\preceq^\#, f^\#, \vee^\#)$ due cpo. Consideriamo $F^b \in P^b(\preceq^b, \vee^b) \xrightarrow{c} P^b(\preceq^b, \vee^b)$, $F^\# \in P^\#(\preceq^\#, \vee^\#) \xrightarrow{c} P^\#(\preceq^\#, \vee^\#)$, $P^b(\preceq^b) \xrightarrow[\alpha]{\gamma} P^\#(\preceq^\#)$, $\alpha(\perp^b) \preceq^\# \perp^\#$ e $\forall p^\# \in P^\# : (\alpha \circ F^b \circ \gamma)(p^\#) \preceq^\# F^\#(p^\#)$. Allora $\alpha(\text{lfp}(F^b)) \preceq^\# \text{lfp}(F^\#)$.*

DIMOSTRAZIONE: Questa proposizione è un corollario della Proposizione 2.21, poiché per ogni catena p_i^b , con $i \in \mathbb{N}$, crescente per \preceq^b e per ogni catena $p_i^\#$, con $i \in \mathbb{N}$ crescente per $\preceq^\#$ tali che $\alpha(p_i^b) \preceq^\# p_i^\#$ per ogni $i \in \mathbb{N}$, abbiamo che $\alpha(\vee_{i \in \mathbb{N}} p_i^b) = \vee_{i \in \mathbb{N}} \alpha(p_i^b) \preceq^\# \vee_{i \in \mathbb{N}} p_i^\#$ per la Proposizione 2.14 e per la definizione di estremo superiore. \square

Le connessioni di Galois corrispondono ad una situazione ideale in cui l'insieme delle proprietà astratte $P^\#$ è stato definito in modo tale che ogni proprietà concreta abbia la migliore approssimazione superiore astratta.

2.2.5 Widening e narrowing: operatori per l'approssimazione di semantiche di punto fisso

In questo paragrafo introduciamo gli operatori di widening e narrowing il cui obiettivo è quello di accelerare l'approssimazione superiore di punto fisso. Per quanto riguarda la terminazione, gli operatori di widening e narrowing assicurano che sarà considerato solo un sottoinsieme finito $P^\# \llbracket p \rrbracket$ di $P^\#$ durante

l'analisi di un qualsiasi programma p . Una connessione di Galois sul sottoinsieme $P^\sharp \llbracket p \rrbracket$, invece, non funzionerebbe quando $P^\sharp \llbracket p \rrbracket$ è diverso per ogni programma p e l'unione di questi sottoinsiemi $P^\sharp \llbracket p \rrbracket$ per tutti i programmi p è infinita.

Sequenza di iterazioni astratte verso il basso con il narrowing

Intuitivamente, per approssimare $\text{lfp}(F^\sharp)$ da sopra, è utile usare un'iterazione verso il basso \check{X}^k , con $k \geq 0$, stazionaria dopo un numero finito di passi, in cui tutti gli elementi sono approssimazioni superiori del più piccolo punto fisso $\text{lfp}(F^\sharp)$. Per essere sicuri che valga la proprietà che tutti gli \check{X}^k , con $k \geq 0$, siano approssimazioni superiori di $\text{lfp}(F^\sharp)$, si può utilizzare il processo induttivo prendendo come base $\text{lfp}(F^\sharp) \preceq^\sharp \check{X}^0$ e come passo induttivo $\text{lfp}(F^\sharp) \preceq^\sharp \check{X}^k \implies \text{lfp}(F^\sharp) \preceq^\sharp \check{X}^{k+1} \preceq^\sharp \check{X}^k$. La base è verificabile partendo dal massimo $\check{X}^0 = t^\sharp$, mentre dimostrare il passo induttivo può risultare meno immediato perchè l'unica informazione disponibile è \check{X}^k e, invece, non si conoscono $F^\sharp(\check{X}^k)$, il più piccolo punto fisso $\text{lfp}(F^\sharp)$ e più in generale i punti fissi di F^\sharp . Definiamo ora l'*operatore di narrowing* Δ che lega le informazioni a nostra disposizione:

Definizione 2.23 (Narrowing) [CC92b, Section 4] *Dato un poset $L(\sqsubseteq)$ si definisce narrowing, e si denota con Δ , una funzione*

$$\Delta \in L \times L \mapsto L$$

tale che:

$$\forall x, y \in L : x \sqsubseteq y \implies (x \sqsubseteq (x \Delta y) \sqsubseteq y) \quad (2.8)$$

per ogni catena decrescente $x^0 \sqsupseteq \dots \sqsupseteq x^i \sqsupseteq \dots$, la catena decrescente definita da $y^0 = x^0, \dots, y^{i+1} = y^i \Delta x^{i+1}, \dots$,
non è strettamente decrescente. (2.9)

La seguente proposizione mostra come si possa migliorare l'approssimazione superiore dei punti fissi:

Proposizione 2.24 *Sia $F^\sharp \in P^\sharp(\preceq^\sharp) \xrightarrow{m} P^\sharp(\preceq^\sharp)$, $\Delta \in P^\sharp \times P^\sharp \mapsto P^\sharp$ un operatore di narrowing e $F^\sharp(p^\sharp) = p^\sharp \preceq^\sharp q^\sharp$. Allora la catena decrescente $\check{X}^0 = q^\sharp, \dots, \check{X}^{k+1} = \check{X}^k \Delta F^\sharp(\check{X}^k)$ ha limite \check{X}^ℓ , con $\ell \in \mathbb{N}$ tale che $p^\sharp \preceq^\sharp \check{X}^\ell \preceq^\sharp q^\sharp$.*

DIMOSTRAZIONE: Dimostriamo per induzione che $p^\sharp \preceq^\sharp \check{X}^k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Per $k = 0$ vale per ipotesi. Supponiamo ora che valga $p^\sharp \preceq^\sharp \check{X}^k$ e

dimostriamo che $p^\sharp \preceq^\sharp \check{X}^{k+1}$: per la monotonia di F^\sharp si ha $p^\sharp = F^\sharp(p^\sharp) \preceq^\sharp F^\sharp(\check{X}^k)$ da cui

$$\begin{aligned}
p^\sharp &= F^\sharp(p^\sharp) \preceq^\sharp F^\sharp(p^\sharp) \Delta F^\sharp(\check{X}^k) && \text{per la (2.8)} \\
&= p^\sharp \Delta F^\sharp(\check{X}^k) && \text{per ipotesi} \\
&\preceq^\sharp \check{X}^k \Delta F^\sharp(\check{X}^k) && \text{per ipotesi induttiva} \\
&= \check{X}^{k+1} && \text{per ipotesi}
\end{aligned}$$

e per transitività si ha la tesi. Dal momento che la catena \check{X}^k , con $k \geq 0$, è decrescente per \preceq^\sharp , allora, per la monotonia di F^\sharp , lo è anche $F^\sharp(\check{X}^k)$, con $k \geq 0$. Inoltre \check{X}^k , con $k \geq 0$, essendo non strettamente decrescente per la condizione (2.9), ha limite \check{X}^ℓ tale che $p^\sharp \preceq^\sharp \check{X}^\ell \preceq^\sharp \check{X}^0 = q^\sharp$. \square

Osserviamo che in un reticolo completo che soddisfa la *condizione di catena decrescente* (cioè che tutte le catene strettamente decrescenti per \preceq^\sharp sono finite) l'operatore di narrowing $x \Delta y$ può essere definito come l'estremo inferiore di x e y per \preceq^\sharp .

Sequenza di iterazioni astratte verso l'alto con il widening

Inizialmente non si conosce nessuna approssimazione del più piccolo punto fisso migliore del massimo t^\sharp . Dal momento che la sequenza di iterazioni astratta dal basso con il narrowing non scende sotto i punti fissi, con il metodo descritto nella Proposizione 2.24, non può essere calcolata nessuna approssimazione del più piccolo punto fisso migliore del più grande punto fisso. Per ottenere una migliore approssimazione superiore iniziale del più piccolo punto fisso, si può partire da sotto, per esempio dal minimo f^\sharp , usando una catena crescente, così da superare il più piccolo punto fisso non conosciuto. Per ottenere questa sequenza di iterazioni verso l'alto introduciamo l'*operatore di widening* ∇ :

Definizione 2.25 (Widening) [CC92b, Section 4] *Dato un poset $L(\sqsubseteq)$ si definisce widening e si denota con ∇ una funzione*

$$\nabla \in L \times L \mapsto L$$

tale che:

$$\forall x, y \in L : x \sqsubseteq x \nabla y \wedge y \sqsubseteq x \nabla y \quad (2.10)$$

per ogni catena crescente $x^0 \sqsubseteq \dots \sqsubseteq x^i \sqsubseteq \dots$, la catena

$$\text{crescente definita da } y^0 = x^0, \dots, y^{i+1} = y^i \nabla x^{i+1}, \dots, \quad (2.11)$$

non è strettamente crescente.

Questa definizione risolve due problemi. Usando una catena crescente \hat{X}^k , con $k \in \mathbb{N}$, partendo da sotto il più piccolo punto fisso $\text{lfp}(F^\sharp)$, abbiamo un criterio calcolabile che verifica che sia raggiunto un punto \hat{X}^ℓ sopra il più piccolo punto fisso: a seconda dei casi possiamo osservare che \hat{X}^ℓ è un punto fisso per F^\sharp oppure, per il teorema di Tarski, è un post punto fisso di F^\sharp . Un semplice modo per ottenere il punto fisso \hat{X}^ℓ è iterare sulla catena $F^{\sharp 0} = \perp^\sharp, \dots, F^{\sharp k+1} = F^\sharp(F^{\sharp k}), \dots$, che converge al più piccolo punto fisso $\text{lfp}(F^\sharp) = \sqcup_{k \geq 0}^\sharp F^{\sharp k}$. Con la definizione data si riesce ad ottenere $\hat{X}^{k+1} = \hat{X}^k \nabla F^\sharp(\hat{X}^k)$ da due termini consecutivi \hat{X}^k e $F^\sharp(\hat{X}^k)$ in modo tale che $\hat{X}^k \preceq^\sharp \hat{X}^{k+1}$ e $F^\sharp(\hat{X}^k) \preceq^\sharp \hat{X}^{k+1}$. Inoltre siamo sicuri che la sequenza di iterazioni \hat{X}^k , con $k \in \mathbb{N}$, si stabilizzi dopo un numero finito di passi.

Con la seguente proposizione mostriamo come calcolare l'approssimazione superiore del più piccolo punto fisso partendo dal basso:

Proposizione 2.26 *Sia $F^\sharp \in P^\sharp(\sqsubseteq^\sharp) \xrightarrow{c} P^\sharp(\sqsubseteq^\sharp)$, $F^\sharp \in P^\sharp(\preceq^\sharp) \xrightarrow{m} P^\sharp(\preceq^\sharp)$, ∇ un operatore di widening e $\forall k \in \mathbb{N} : p^{\sharp k} \preceq^\sharp q^\sharp \implies \sqcup_{k \in \mathbb{N}}^\sharp p^{\sharp k} \preceq^\sharp q^\sharp$. Allora la catena crescente $\hat{X}^0 = \perp^\sharp, \dots, \hat{X}^{k+1} = \hat{X}^k \nabla F^\sharp(\hat{X}^k)$ per $k \in \mathbb{N}$ ha limite \hat{X}^ℓ , con $\ell \in \mathbb{N}$ tale che $\text{lfp}(F^\sharp) \preceq^\sharp \hat{X}^\ell$.*

DIMOSTRAZIONE: Dimostriamo per induzione che $F^{\sharp k} \preceq^\sharp \hat{X}^k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Per $k = 0$, per la riflessività di \preceq^\sharp , si ha $F^{\sharp 0} = \perp^\sharp \preceq^\sharp \perp^\sharp = \hat{X}^0$. Supponiamo ora che valga $F^{\sharp k} \preceq^\sharp \hat{X}^k$: allora, per la monotonia di F^\sharp , $F^{\sharp k+1} = F^\sharp(F^{\sharp k}) \preceq^\sharp F^\sharp(\hat{X}^k)$ da cui $\hat{X}^k \preceq^\sharp \hat{X}^{k+1}$ e $F^{\sharp k+1} \preceq^\sharp \hat{X}^{k+1}$ per la (2.10) poiché $\hat{X}^{k+1} = \hat{X}^k \nabla F^\sharp(\hat{X}^k)$.

Segue che la catena \hat{X}^k , con $k \in \mathbb{N}$, e quindi, per la monotonia anche $F^\sharp(\hat{X}^k)$, con $k \in \mathbb{N}$, è crescente ma non strettamente per la (2.11). Se \hat{X}^ℓ , con $\ell \in \mathbb{N}$, è il limite della catena \hat{X}^k , con $k \in \mathbb{N}$, allora abbiamo

$$F^{\sharp k} \preceq^\sharp \hat{X}^k \preceq^\sharp \hat{X}^\ell$$

per ogni $k \leq \ell$. Inoltre se $m \geq \ell$ e $F^{\sharp m} \preceq^\sharp \hat{X}^m = \hat{X}^\ell$, allora

$$\hat{X}^{m+1} = \hat{X}^m \nabla F^\sharp(\hat{X}^m) = \hat{X}^\ell \nabla F^\sharp(\hat{X}^\ell) = \hat{X}^\ell.$$

Da ciò segue che $\forall k \in \mathbb{N} : F^{\sharp k} \preceq^\sharp \hat{X}^\ell$ e quindi $\text{lfp}(F^\sharp) = \sqcup_{k \in \mathbb{N}}^\sharp F^{\sharp k} \preceq^\sharp \hat{X}^\ell$. \square

Osservazione 2.27 *È sempre possibile fare in modo che una funzione che verifica la condizione (2.10) soddisfi anche la condizione (2.11).*

Per ottenere questo risultato si fissa un numero massimo n di iterazioni di widening che si vogliono eseguire e l' $(n + 1)$ -esima iterazione è forzata a restituire come risultato \top . In questo modo, la catena crescente formata dai risultati delle iterazioni di widening non è strettamente crescente, essendo impossibile superare il \top .

Sequenza di iterazioni astratte verso l'alto e verso il basso

Per migliorare l'approssimazione del più piccolo punto fisso si possono utilizzare contemporaneamente gli operatori di widening e di narrowing: applicando il widening otteniamo una sequenza d'iterazione verso l'alto che fornisce un'approssimazione superiore del più piccolo punto fisso; quindi si può usare una sequenza d'iterazione verso il basso con il narrowing per migliorare l'approssimazione superiore, rimanendo però sempre sopra al punto fisso.

2.3 Esempio

All'interno dei programmi l'interpretazione astratta può essere utilizzata per la ricerca delle equazioni e delle disequazioni lineari che devono essere soddisfatte dalle variabili del programma stesso. L'esempio che verrà proposto è un esempio di analisi statica che mira ad effettuare un controllo a tempo di compilazione degli accessi agli array, cioè a verificare che tutte le volte che si accede ad un elemento $T[J]$ di un array T si ha $1 \leq J \leq N$, dove N è il numero di elementi dell'array T . Per far questo consideriamo l'algoritmo di heapsort, presentato in Figura 2.3, che ordina gli N elementi di un array T in modo crescente.

Analizziamo questa procedura prendendo come condizione iniziale $N \geq 2$: questa condizione ci permette di escludere i casi banali e di considerare quindi solamente array non vuoti contenenti almeno due elementi. Inoltre, l'analisi a cui siamo interessati si occupa solamente delle limitazioni a cui sono soggette le variabili del programma che sono utilizzate da indice per gli accessi agli elementi dell'array, trascurando le istruzioni che riguardano le operazioni sugli array: le istruzioni come $\{K := T[L];\}$ sono messe tra parentesi graffe per questo motivo. I risultati che si ottengono analizzando la procedura di

```

procedure HEAPSORT(integer_value  $N$ ; real_array  $[1..N] T$ );
begin integer  $L, R, I, J$ ; real  $K$ ; (1)
     $L := (N \text{ div } 2) + 1$ ;  $R := N$ ; (2)
    if  $(L \geq 2)$  then (3)
         $L := L - 1$ ;  $\{K := T[L]\}$ ; (4)
    else (5)
         $\{K := T[R]; T[R] := T[1];\}$   $R := R - 1$ ; (6)
    fi; (7)
    while  $(R \geq 2)$  do (8)
         $I := L$ ;  $J := 2 * I$ ; (9)
        while  $(J \leq R)$  do (10)
            if  $(J \leq R - 1)$  then (11)
                if  $\{T[J] < T[J + 1]\}$  then  $J := J + 1$  fi; fi; (12)
                if  $\{K \geq T[J]\}$  then
                    exit  $\{of\ the\ inner\ loop\}$  fi; (13)
                     $\{T[I] := T[J];\}$   $I := J$ ;  $J := 2 * J$  (14)
            od; (15)
             $\{T[I] := K\}$  (16)
            if  $L \geq 2$  then (17)
                 $L := L - 1$ ;  $\{K := T[L]\}$  (18)
            else (19)
                 $\{K := T[R]; T[R] := T[1];\}$   $R := R - 1$ ; (20)
            fi; (21)
             $\{T[1] := K;\}$  (22)
        od; (23)
    end;

```

Figura 2.3: Heapsort.

heapsort e utilizzando solamente disequazioni non strette, sono:

- (1) : $N \geq 2$
- (2) : $N \geq 2, N \leq 2L \leq N + 1, R = N$
- (3) : $N \geq 2, N \leq 2L \leq N + 1, R = N, L \geq 2$
- (5) : $N \geq 2, N \leq 2L \leq N + 1, R = N, L \leq 2$
- (8) : $R \geq 2, 2L \leq N + 1, R + 3 \leq N, 2L + 2R + 1 \leq 3N, L \geq 1,$
 $R \leq N$
- (10) : $R \geq 2, 2L \leq N + 1, R + 3 \leq N, 2, L \geq 1, R \leq N, 2I = J,$
 $L \leq I, 2I + 6L + R + 18 \leq 12N, J \leq R, 2L + 2R + 1 \leq 3N,$
 $4I + 2L + 1 \leq 2R + 3N$
- (11) : $R \geq 2, 2L \leq N + 1, R + 3 \leq N, 2, L \geq 1, R \leq N, 2I = J,$
 $L \leq I, 2I + 6L + R + 18 \leq 12N, J \leq R - 1, 2L + 2R + 1 \leq 3N,$
 $4I + 2L + 1 \leq 2R + 3N$
- (12), (13) : $R + 3 \leq N, 2, L \geq 1, R \leq N, J \leq 2I + 1, 2I \leq J, L \leq I,$
 $J \leq R, 2L + 2R + 1 \leq 3N$
- (15) : $J + 2 \leq 2I + R, 2J + 2L \leq 4I + N + 1, R + 3 \leq 2NL \geq 1,$
 $R \leq N, 7J + 6L + R + 18 \leq 12I + 12N, 2I \leq J \leq 2I + 1,$
 $L \leq I, 2L + 2R + 1 \leq 3N, 8J + 2L + 1 \leq 12I + 2R + 3N$
- (17) : $J + 2 \leq 2I + R, 2J + 2L \leq 4I + N + 1, R + 3 \leq 2NL \geq 1,$
 $R \leq N, 7J + 6L + R + 18 \leq 12I + 12N, 2I \leq J \leq 2I + 1,$
 $L \leq I, 2L + 2R + 1 \leq 3N, 8J + 2L + 1 \leq 12I + 2R + 3N, L \leq 2$
- (19) : $J + 2 \leq 2I + R, 2J + 2L \leq 4I + N + 1, R + 3 \leq 2NL \geq 1,$
 $R \leq N, 7J + 6L + R + 18 \leq 12I + 12N, 2I \leq J \leq 2I + 1,$
 $L \leq I, 2L + 2R + 1 \leq 3N, 8J + 2L + 1 \leq 12I + 2R + 3N, L \leq 2$
- (21) : $R \geq 1, 2L \leq N + 1, R + 4 \leq 2N, 2L + 2R + 3 \leq 3N, L \geq 1,$
 $R \leq N.$

Questi risultati si ottengono considerando le istruzioni che coinvolgono le variabili o le condizioni che quest'ultime devono soddisfare. La condizione all'inizio del programma rappresenta ciò che sappiamo sulle variabili all'inizio dell'esecuzione. Per ogni tipo di comando del programma vi è una trasformazione che permette di ottenere le condizioni associate all'output del comando in accordo alle condizioni di input. Ad esempio, le istruzioni di assegnamento in generale forniscono una equazione: infatti, se consideriamo l'istruzione $R := N$, questa ci permette di evidenziare che a quel punto del programma vale l'equazione $R = N$. Importante è anche considerare come si modificano

le condizioni al termine di un **if – then – else**: le condizioni che si ottengono al termine di questa struttura devono essere *unite* in modo tale che al termine valgano sia le condizioni che derivano sia dal ramo **then** che dal ramo **else**. Consideriamo l'**if – then – else** che si trova nella procedura di heapsort tra i punti (3) e (7). Per entrare nel ramo **then** deve essere verificata la condizione $L \geq 2$: quindi nell'istruzione di (4) bisogna supporre che vi sia anche questa condizione. Dopo aver concluso le istruzioni dell'**if – then – else** è necessario unire le informazioni che derivano da entrambi i casi: dal momento che oltre alle condizioni di (2) al termine del **then** otteniamo $L \geq 1$ e al termine dell'**else** abbiamo $R = N - 1$, unendo queste condizioni, alla fine del **if – then – else** otteniamo $N \geq 2, N \leq 2L \leq N + 1, N - 1 \leq R \leq N$ e $L \geq 1$.

Inoltre, non tutte le condizioni che devono essere soddisfatte sono sempre espresse: in alcuni casi, si possono derivare da altre. Ad esempio, la condizione $N \geq 2$ è in alcuni casi, come in (1), scritta esplicitamente, in altri si deriva da altre condizioni: questo è il caso del punto (8) dove $N \geq 2$ deriva da $R \geq 2$ e $R \leq N$.

Utilizzando i risultati ottenuti in questo modo si verifica che tutti gli accessi all'array sono corretti. Infatti, se consideriamo una variabile che è utilizzata come indice per accedere agli elementi dell'array, si ottiene in ogni punto che questa è compresa almeno tra 1 e N .

Capitolo 3

Poliedri convessi chiusi

3.1 Preliminari

Introduciamo per prima cosa alcune nozioni algebriche e geometriche tratte da [Lan77] che utilizzeremo in seguito.

Definizione 3.1 (Gruppo e gruppo abeliano) *Un gruppo G è un insieme a cui è assegnata una regola (chiamata legge di composizione) che indichiamo con $*$ che permette di associare ad ogni coppia di elementi x, y di G un elemento di G stesso, denotato con $x * y$ e avente le seguenti proprietà:*

1. *l'operazione è associativa, e cioè per ogni $x, y, z \in G$, $x * (y * z) = (x * y) * z$;*
2. *l'insieme contiene l'elemento neutro e , cioè un elemento tale che per ogni $x \in G$, $x * e = e * x = x$;*
3. *per ogni elemento x di G esiste un elemento y in G , tale che $x * y = y * x = e$.*

Un gruppo si dice abeliano se l'operazione $$ è anche commutativa.*

Se la regola assegnata all'insieme è l'operazione \cdot il gruppo viene detto *moltiplicativo*, il suo elemento neutro è detto *unità* e si indica con 1 e dato un $x \in G$ si denota con x^{-1} l'elemento di G detto *inverso* tale che $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$. Se invece la legge di composizione è l'operazione $+$, il gruppo viene detto *additivo*, il suo elemento neutro è detto *nullo* e si indica con 0 e dato un $x \in G$ si denota con $-x$ l'elemento di G detto *opposto* tale che $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

Definizione 3.2 (Campo) *Sia K un insieme e siano $+$ e \cdot due operazioni. Una struttura $[K; +, \cdot]$ si definisce campo se:*

1. $[K; +]$ è un gruppo abeliano;
2. $[K \setminus \{0\}; \cdot]$ è un gruppo abeliano;
3. per ogni x, y e $z \in K$, $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Gli elementi di K si dicono scalari.

Si può osservare che l'insieme \mathbb{R} con le operazioni di somma e prodotto è un campo.

Definizione 3.3 (Matrice $m \times n$) Sia K un campo e siano m e n due interi positivi; $m \cdot n$ scalari di K disposti nel modo seguente

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

costituiscono una matrice $m \times n$ in K . Si può abbreviare la notazione di questa matrice scrivendola (a_{ij}) , $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

Chiamiamo a_{ij} il termine o componente o elemento ij della matrice.

Se denotiamo con A la matrice scritta nella (3.1), allora la i -esima riga è indicata con A_i ed è definita ponendo

$$A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}).$$

La j -esima colonna è indicata da A^j ed è definita ponendo

$$A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Una matrice $1 \times n$ è un vettore riga, mentre una matrice $m \times 1$ è un vettore colonna (o vettore). Inoltre, una matrice $n \times n$ è detta matrice quadrata: in una matrice quadrata, la diagonale principale è formata dagli elementi a_{ij} tali che $i = j$, mentre gli elementi tali che $i + j = n + 1$ costituiscono la diagonale secondaria. I termini della diagonale principale sono anche detti diagonali.

Indichiamo con $\mathfrak{M}_{m,n}(K)$ l'insieme delle matrici $m \times n$ in K , oppure con $\mathfrak{M}_{m,n}$ se il riferimento a K è chiaro.

Nel seguito, ci occuperemo principalmente del caso in cui gli scalari appartengono al campo \mathbb{R} e quindi quando scriveremo $\mathfrak{M}_{m,n}$, ci riferiremo a matrici appartenenti a $\mathfrak{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Definizione 3.4 (Matrice trasposta) Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $m \times n$. La matrice $n \times m$ $B = (b_{ji})$ tale che $b_{ji} = a_{ij}$ per ogni $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$ è detta matrice trasposta e si indica con A^T . Quindi se A è la matrice definita nella (3.1), allora A^T è la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Il trasposto di un vettore colonna è un vettore riga. Viceversa, il trasposto di un vettore riga è un vettore colonna.

Definizione 3.5 (Prodotto tra matrici) Siano $A \in \mathfrak{M}_{m,h}$ e $B \in \mathfrak{M}_{h,n}$. Si dice matrice prodotto C di A e B , nell'ordine indicato, e si scrive $C = AB$, la matrice $C \in \mathfrak{M}_{m,n}$ tale che

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^h a_{ik} b_{kj}$$

per ogni $i = 1, \dots, m$ e per ogni $j = 1, \dots, n$.

Definizione 3.6 (Matrice unità) Si definisce matrice unità $n \times n$ (o identità) la matrice quadrata i cui elementi sono tutti nulli esclusi quelli diagonali che invece sono uguali a uno. Denotiamo questa matrice con I_n o semplicemente con I quando non è necessario specificare il numero n . Quindi, gli elementi a_{ij} della matrice I sono tali che:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j; \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Definizione 3.7 (Matrice inversa) Sia $A \in \mathfrak{M}_{n,n}$. Se esiste una matrice $n \times n$ B tale che

$$AB = BA = I_n,$$

allora A si dice invertibile. La matrice B è detta matrice inversa di A e si indica con A^{-1} .

Nel seguito indicheremo con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dove $n \geq 1$, la n -upla $(x_1, \dots, x_n)^T$, in particolare con $\mathbf{0}$ la n -upla $(0, \dots, 0)^T$, e utilizzeremo la notazione \mathbb{R}_+^n per l'insieme dei vettori $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ con coordinate non negative. Inoltre, si definisce un'operazione di moltiplicazione di un vettore \mathbf{x} per uno scalare λ in modo tale che il nuovo vettore $\lambda\mathbf{x}$ sia la n -upla $(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)^T$.

Definizione 3.8 (Prodotto scalare) *Dati due vettori $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$, indichiamo con $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ il prodotto scalare di \mathbf{x} e \mathbf{y} definito nel seguente modo*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Se $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$, i due vettori \mathbf{x} e \mathbf{y} si dicono ortogonali.

Proposizione 3.9 (Proprietà del prodotto scalare) *Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora:*

1. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$;
2. $\langle \mathbf{x}, (\mathbf{y} + \mathbf{z}) \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$;
3. $\langle \mathbf{x}, (\lambda \mathbf{y}) \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$;
4. se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, allora $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$; in ogni altro caso abbiamo $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$.

Definizione 3.10 (Combinazioni) *Dati $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ elementi di \mathbb{R}^n ed i numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, l'espressione*

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{x}_i \tag{3.2}$$

si dice combinazione lineare dei vettori $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ con coefficienti $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. L'espressione (3.2) si dice anche

- combinazione positiva, se $\lambda_i \geq 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$;
- combinazione affine, se $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$;
- combinazione convessa, se $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ e $\lambda_i \geq 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

Una combinazione convessa è quindi una combinazione lineare, positiva e affine.

Definizione 3.11 (Segmento) Dati due punti $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, si definisce segmento di estremi i punti \mathbf{x} e \mathbf{y} l'insieme di tutte le combinazioni convesse di \mathbf{x} e \mathbf{y} .

Definizione 3.12 (Indipendenza) Un insieme di vettori $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente se l'equazione

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{x}_i \lambda_i = \mathbf{0}$$

ha, come unica soluzione, $\lambda_i = 0$, per ogni $i = 1, \dots, k$.

Un insieme di vettori $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ è affinementemente indipendente se il sistema di equazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^k \mathbf{x}_i \lambda_i = \mathbf{0} \\ \sum_{i=1}^k \lambda_i = 0 \end{array} \right.$$

ha come unica soluzione $\lambda_i = 0$, per ogni $i = 1, \dots, k$.

Si osserva che se $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti, allora gli elementi di Q sono anche affinementemente indipendenti.

Definizione 3.13 (Rango di una matrice) Sia $A \in \mathfrak{M}_{n,m}$. Allora si definisce rango di A e si indica con $\rho(A)$ il massimo numero di righe o di colonne linearmente indipendenti di A .

Definizione 3.14 (Generatori di un sottoinsieme) Dati $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in S$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice generato da $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ se ogni suo elemento si può esprimere come combinazione lineare di $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$.

I vettori $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ si dicono generatori di S .

Definizione 3.15 (Base) Dato $S \subseteq \mathbb{R}^n$, si dice base di S un insieme di vettori $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ che generano S e sono linearmente indipendenti.

Proposizione 3.16 Il massimo numero di vettori linearmente indipendenti di \mathbb{R}^n è n ; il massimo numero di vettori affinementemente indipendenti di \mathbb{R}^n è $n + 1$.

Esempio 3.17 Mostriamo ora un esempio delle possibili combinazioni di due vettori in \mathbb{R}^2 .

- L'insieme dei punti determinati da una combinazione lineare di due vettori linearmente indipendenti coincide con l'intero spazio. Consideriamo ad esempio come vettori linearmente indipendenti $\mathbf{e}_1 = (1, 0)^T$ ed $\mathbf{e}_2 = (0, 1)^T$ e sia $(x, y)^T$ un generico vettore di \mathbb{R}^2 . Si ha quindi:

$$(x, y)^T = \lambda \mathbf{e}_1 + \mu \mathbf{e}_2 = \lambda(1, 0)^T + \mu(0, 1)^T = (\lambda, 0)^T + (0, \mu)^T = (\lambda, \mu)^T.$$

È sufficiente e necessario quindi scegliere $\lambda = x$ e $\mu = y$.

- I punti individuati tramite una combinazione positiva dei vettori $\mathbf{e}_1 = (1, 0)^T$ ed $\mathbf{e}_2 = (0, 1)^T$ appartengono all'insieme

$$A_1 = \{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0 \}.$$

Infatti, se $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$

$$(x, y)^T = \lambda \mathbf{e}_1 + \mu \mathbf{e}_2 = (\lambda, \mu)^T$$

con la condizione che $\lambda, \mu \geq 0$. Quindi, $(x, y)^T$ per essere espresso tramite una combinazione positiva di \mathbf{e}_1 ed \mathbf{e}_2 deve appartenere all'insieme A_1 .

- Una combinazione affine di due vettori indipendenti descrive la retta che congiunge questi due punti. Se consideriamo, nuovamente, \mathbf{e}_1 ed \mathbf{e}_2 , l'insieme che si può descrivere è

$$A_2 = \{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x + y - 1 = 0 \}.$$

Infatti, se $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$

$$(x, y)^T = \lambda \mathbf{e}_1 + \mu \mathbf{e}_2 = (\lambda, \mu)^T$$

con la condizione che $\lambda + \mu = 1$. Dalla condizione sui parametri si ha che $\mu = 1 - \lambda$ e quindi

$$(x, y)^T = (\lambda, \mu)^T = (\lambda, 1 - \lambda)^T.$$

Questa può essere scritta anche come

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \end{cases}$$

che è proprio la retta

$$y = 1 - x.$$

- Infine, una combinazione convessa di due vettori indipendenti descrive il segmento che li congiunge. Infatti, poiché una combinazione convessa è anche una combinazione affine e positiva, la parte di spazio che descrive è $A_1 \cap A_2$ e questa corrisponde proprio al segmento che congiunge i due punti.

Definizione 3.18 (Trasformazione lineare) Si definisce trasformazione lineare di \mathbb{R}^n un'applicazione

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

per cui valgono le seguenti proprietà:

1. comunque si prendano gli elementi \mathbf{x} e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ abbiamo

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y});$$

2. per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ abbiamo

$$f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x}).$$

Una trasformazione lineare $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ si può scrivere come $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, dove $A \in \mathfrak{M}_{n,n}$.

Definizione 3.19 (Trasformazione affine) Una trasformazione affine di \mathbb{R}^n è un'applicazione

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

che manda un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ in un punto $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n$ tale che:

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

dove $A \in \mathfrak{M}_{n,n}$ matrice di reali e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

Definizione 3.20 (Insiemi convessi) Un insieme $S \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice convesso se e solo se la combinazione convessa di due qualsiasi punti di S è ancora un punto di S , cioè il segmento che ha come estremi due punti qualsiasi di S è tutto contenuto nell'insieme S .

Proposizione 3.21 L'intersezione di una famiglia di insiemi convessi è ancora un insieme convesso.

DIMOSTRAZIONE: Sia $(S_i)_{i \in I}$ una famiglia di sottoinsiemi convessi di \mathbb{R}^n e consideriamo due vettori \mathbf{x} e $\mathbf{y} \in S_i$ per ogni $i \in I$: ciò significa che $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \bigcap_{i \in I} S_i$.

Un vettore \mathbf{z} ottenuto come combinazione convessa di \mathbf{x} e \mathbf{y} appartiene a $\bigcap_{i \in I} S_i$, perché $\mathbf{z} \in S_i$ per ogni $i \in I$, essendo questi insiemi convessi. \square

Proposizione 3.22 *L'immagine tramite una trasformazione affine di un insieme convesso è un insieme convesso.*

DIMOSTRAZIONE: Sia f una trasformazione affine di \mathbb{R}^n

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

e $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso. Dimostriamo che l'insieme $S' \subseteq \mathbb{R}^n$ definito come

$$S' = \{ \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n \mid \exists \mathbf{x} \in S . \mathbf{x}' = f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b} \}$$

è un insieme convesso. Siano $\mathbf{x}', \mathbf{y}' \in S'$ e \mathbf{z}' combinazione convessa di \mathbf{x}' e \mathbf{y}' :

$$\mathbf{z}' = \lambda \mathbf{x}' + \mu \mathbf{y}'$$

con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$ e $\lambda + \mu = 1$. Dimostriamo che $\mathbf{z}' \in S'$. Infatti,

$$\mathbf{x}', \mathbf{y}' \in S' \implies \exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S . \mathbf{x}' = f(\mathbf{x}) \text{ e } \mathbf{y}' = f(\mathbf{y}).$$

Si può quindi scrivere:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}' &= \lambda \mathbf{x}' + \mu \mathbf{y}' = \lambda f(\mathbf{x}) + \mu f(\mathbf{y}) \\ &= \lambda(A\mathbf{x} + \mathbf{b}) + \mu(A\mathbf{y} + \mathbf{b}) \\ &= A(\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) + (\lambda + \mu)\mathbf{b}. \end{aligned}$$

Ma $\lambda + \mu = 1$ perché sono i coefficienti di una combinazione convessa e definendo \mathbf{z} come $\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}$, allora \mathbf{z} appartiene a S , perché S è un insieme convesso. Quindi $\mathbf{z}' = A\mathbf{z} + \mathbf{b}$, con $\mathbf{z} \in S$, e cioè $\mathbf{z}' \in S'$. \square

Definizione 3.23 (Involucri) *Dato un insieme $S \subseteq \mathbb{R}^n$*

- *si definisce involucro lineare di S l'insieme di tutte le combinazioni lineari dei punti di S ;*
- *si definisce involucro affine di S l'insieme di tutte le combinazioni affini dei punti di S ;*
- *si definisce involucro (o inviluppo) convesso di S l'insieme di tutte le combinazioni convesse dei punti di S .*

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un involucro. Si dice che S ha dimensione n e si indica con $\dim(S) = n$ se il massimo numero di vettori affinemente indipendenti in S è uguale a $n + 1$.

Definizione 3.24 (Iperpiani) Dato un vettore non nullo $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}$, un iperpiano affine ortogonale al vettore \mathbf{a} è definito come l'insieme

$$H = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = b \} \subset \mathbb{R}^n.$$

Se $b = 0$, l'insieme H è detto iperpiano lineare ortogonale al vettore \mathbf{a} .

Un altro modo per descrivere un iperpiano lineare è quello di definirlo come insieme di punti ottenuti come combinazioni lineari di $n - 1$ vettori linearmente indipendenti che generano l'iperpiano: quando si utilizza questo secondo metodo si parla di *rappresentazione parametrica*. Inoltre, si può notare che un iperpiano affine è un iperpiano lineare traslato.

Definizione 3.25 (Semispazi) Dato un vettore non nullo $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ e uno scalare $b \in \mathbb{R}$,

- l'insieme

$$S = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle > b \}$$

è detto semispazio affine aperto; se $b = 0$, S è detto semispazio lineare aperto.

- l'insieme

$$S = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \geq b \}$$

è detto semispazio affine chiuso; se $b = 0$, S è detto semispazio lineare chiuso.

Consideriamo ora il semispazio

$$S = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \geq b \}$$

(con b indifferentemente uguale o diverso da zero) e il semispazio S' ottenuto moltiplicando per -1 entrambi i membri della disequazione e mantenendo invariato il segno della disequazione, cioè:

$$\begin{aligned} S' &= \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid -\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \geq -b \} \\ &= \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \leq b \}. \end{aligned}$$

Intersecando gli insiemi S e S' , si individua l'iperpiano descritto dall'equazione $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = b$:

$$\begin{aligned} H &= S \cap S' \\ &= \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \geq b \} \cap \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \leq b \} \\ &= \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = b \}. \end{aligned}$$

3.2 Poliedri chiusi

In questa sezione presentiamo le definizioni fondamentali che riguardano i poliedri, in modo analogo alla descrizione presentata in [FP96] e [Wil93].

Definizione 3.26 (Poliedri) *Un poliedro $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ è un insieme ottenuto come intersezione di un numero finito di semispazi chiusi.*

Osservazione 3.27 *Tutti i poliedri $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ sono convessi.*

DIMOSTRAZIONE: Poiché un poliedro è definito come l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi, per la Proposizione 3.21 è sufficiente verificare che i semispazi chiusi sono insiemi convessi. Questo si verifica considerando la definizione di semispazio chiuso. Dato

$$S = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \geq b \},$$

siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ due generici punti e dimostriamo che ogni loro combinazione convessa individua un punto appartenente all'insieme. Sia

$$\mathbf{z} = \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}$$

con $\lambda + \mu = 1$ e $\lambda, \mu \geq 0$. Allora

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{a}, (\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{a}, \lambda \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mu \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle + \mu \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle$$

e per la definizione di combinazione convessa si ha che

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{z} \rangle \geq \lambda b + \mu b = (\lambda + \mu)b = b.$$

Quindi $\mathbf{z} \in S$. □

Osservazione 3.28 *Si dice che un poliedro ha dimensione k e si denota con $\dim(\mathcal{P}) = k$ se il numero massimo di punti affinemente indipendenti del poliedro \mathcal{P} è $k + 1$.*

3.2.1 Doppia rappresentazione

Ogni poliedro convesso può essere rappresentato e manipolato in due modi differenti: si possono fornire equazioni e disequazioni lineari che descrivono i semispazi e gli iperpiani che lo individuano, oppure può essere considerato come il luogo geometrico dei punti determinati da combinazioni di vario genere di elementi particolari del poliedro. Partendo dalla definizione si può quindi fornire una prima rappresentazione dei poliedri.

1. Rappresentazione di un poliedro tramite i vincoli.

Nel seguito parleremo di equazioni e disequazioni lineari senza l'aggettivo "lineare". Inoltre, ricordiamo che un generico sistema di equazioni o disequazioni è detto *omogeneo* se il vettore formato dai termini noti delle equazioni o delle disequazioni è il vettore nullo; in caso contrario diremo che il sistema è *non omogeneo*.

Definizione 3.29 (Vincolo) *Si chiamano vincoli del poliedro \mathcal{P} le equazioni e le disequazioni che individuano rispettivamente gli iperpiani e i semispazi che contengono \mathcal{P} .*

Per la Definizione 3.26, un poliedro $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ è descritto dall'intersezione di N semispazi chiusi $S_i \subseteq \mathbb{R}^n$, cioè $\mathcal{P} = \bigcap_{i=1}^N S_i$. Inoltre, ogni S_i si può scrivere come l'insieme $S_i = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle \geq b_i \}$, con $i = 1, \dots, N$. Ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$ deve perciò soddisfare la disequazione che definisce ogni S_i , per ogni $i = 1, \dots, N$: ciò significa che \mathcal{P} è l'insieme di punti \mathbf{x} in \mathbb{R}^n che soddisfano il sistema

$$\begin{cases} \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{x} \rangle \geq b_1 \\ \quad \quad \quad \vdots \\ \langle \mathbf{a}_N, \mathbf{x} \rangle \geq b_N \end{cases} \quad (3.3)$$

Il sistema (3.3) che definisce il poliedro \mathcal{P} può essere trasformato in una disequazione ed eventualmente in una equazione matriciali. Per prima cosa, ricordiamo che se all'interno del sistema esistono due disequazioni

$$\begin{aligned} c_i : \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle &\geq b_i, \\ c_j : \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x} \rangle &\geq b_j \end{aligned}$$

tali che $\mathbf{a}_j = -\mathbf{a}_i$ e $b_j = -b_i$ la disequazione c_j si può scrivere come

$$\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle \leq b_i,$$

e invece di considerarle separatamente si può utilizzare l'equazione

$$\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle = b_i.$$

Supponiamo che all'interno del sistema ci siano $2 \cdot m_1$ disequazioni di questo tipo e che dopo questa trasformazione si abbiano m_1 equazioni: il numero delle disequazioni del sistema si è quindi ridotto a $m_2 = N - 2 \cdot m_1$. L'insieme di tutte le equazioni può essere scritto tramite una matrice $A \in \mathfrak{M}_{m_1, n}$ composta dai coefficienti delle equazioni e da un vettore colonna $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m_1}$

formato dai termini noti delle rispettive equazioni. Quindi l'insieme delle equazioni può essere scritto nella forma

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Si può procedere in modo analogo con le disequazioni. Anche in questo caso, l'insieme delle disequazioni può essere scritto tramite una matrice $C \in \mathfrak{M}_{m_2, n}$ formata dai loro coefficienti e da un vettore colonna $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{m_2}$ composto dai termini noti. L'insieme delle disequazioni può quindi essere scritto nella forma

$$C\mathbf{x} \geq \mathbf{d}.$$

Analogamente, dato un sistema composto da equazioni e disequazioni è sempre possibile individuare un sistema formato solamente da disequazioni.

Definizione 3.30 (Rappresentazione implicita) *Sia $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$. Se \mathcal{P} è l'insieme di punti che soddisfano il sistema (3.3), si dice rappresentazione implicita di \mathcal{P} la seguente descrizione di \mathcal{P} :*

$$\mathcal{P} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, C\mathbf{x} \geq \mathbf{d} \},$$

dove $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e $C\mathbf{x} \geq \mathbf{d}$ sono rispettivamente l'equazione e la disequazione matriciale che derivano dal sistema (3.3).

Se \mathbf{C} è un sistema di vincoli, indichiamo con $\mathcal{P}(\mathbf{C})$ il poliedro la cui rappresentazione implicita è composta dagli elementi di \mathbf{C} .

Esempio 3.31 *Proviamo a scrivere in forma matriciale il poliedro \mathcal{P} che rappresenta in \mathbb{R}^2 il primo quadrante. Questo coincide con l'intersezione dei semispazi*

$$S_1 = \{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \}$$

e

$$S_2 = \{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0 \}.$$

Quindi la matrice delle equazioni in questo caso non contiene nessuna riga, mentre quella delle disequazioni ha due righe:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con il vettore dei termini noti

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

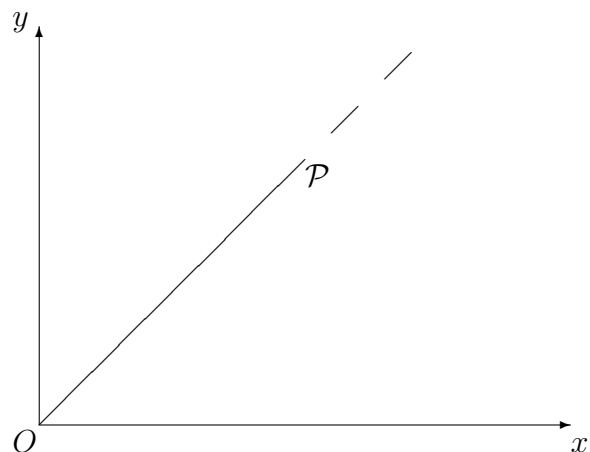


Figura 3.1: Poliedro.

Il poliedro quindi si può scrivere come:

$$\mathcal{P} = \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Esempio 3.32 Proviamo ora a scrivere in forma matriciale il poliedro (rappresentato nella Figura 3.1) intersezione dei seguenti semispazi:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x - y \geq 0 \}, \\ S_2 &= \{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x - y \leq 0 \}, \\ S_3 &= \{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \} \\ S_4 &= \{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0 \}. \end{aligned}$$

Si vede che per come sono stati definiti, i semispazi S_1 e S_2 individuano la retta di equazione $x - y = 0$ e quindi in questo caso la matrice delle equazioni diventa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$$

con termine noto nullo. La matrice delle disequazioni è

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con il vettore dei termini noti

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il poliedro quindi si può scrivere come:

$$\mathcal{P} = \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Si può notare che questo stesso poliedro si può individuare tramite l'intersezione solamente dei primi tre semispazi e cioè

$$\mathcal{P} = \bigcap_{i=1}^3 S_i.$$

Infatti, un punto $(x, y)^T$ che appartiene all'intersezione $\bigcap_{i=1}^3 S_i$ è tale che

$$x \geq 0 \quad \text{e} \quad x = y$$

e quindi anche la coordinata y è non negativa: questa è proprio la caratterizzazione dei punti dell'insieme S_4 .

2. Rappresentazione di un poliedro tramite i generatori.

Ora vogliamo scrivere un poliedro $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ tramite opportune combinazioni di un numero finito di elementi di \mathcal{P} . Per far questo forniamo le seguenti definizioni.

Definizione 3.33 (Vertice) Si definisce vertice o punto estremo di un poliedro $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ ogni punto di \mathcal{P} che non può essere scritto come combinazione convessa di punti di \mathcal{P} distinti da esso.

Definizione 3.34 (Raggio) Un raggio (o raggio unidirezionale) di un poliedro non vuoto $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ è un vettore $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ tale che per ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$,

$$(\mathbf{x} + \mu\mathbf{r}) \in \mathcal{P}$$

per ogni $\mu \geq 0$.

Se $\mathcal{P} = \emptyset$, allora \mathcal{P} non ha raggi.

Un raggio non è quindi un insieme di punti del poliedro, ma è una direzione in cui \mathcal{P} è illimitato.

Definizione 3.35 (Raggio estremo) Sia \mathbf{r} un raggio di \mathcal{P} . Si dice che \mathbf{r} è un raggio estremo di \mathcal{P} se non può essere scritto come combinazione positiva dei raggi $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k$ di \mathcal{P} tali che $\mathbf{r}_i \neq \lambda_i \mathbf{r}$, per ogni $i = 1, \dots, k$ e per ogni $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$.

Consideriamo equivalenti due raggi estremali che differiscono per un fattore di proporzionalità positivo.

Definizione 3.36 (Retta) Sia $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro non vuoto. Un vettore $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^n$ è una retta (o raggio bidirezionale) se i vettori \mathbf{l} e $-\mathbf{l}$ sono entrambi raggi di \mathcal{P} .

Osserviamo che se $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ è un poliedro vuoto, allora \mathcal{P} non contiene rette.

Osservazione 3.37 Sia $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro non vuoto. Se $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^n$ è una retta di \mathcal{P} , allora per ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$ si ha che

$$\mathbf{x} + \mu \mathbf{l} \in \mathcal{P},$$

per ogni $\mu \in \mathbb{R}$.

Nel seguito di questo capitolo e nel capitolo 4, quando ci riferiremo all'insieme dei raggi di un poliedro, considereremo solo quei vettori che non individuano anche una retta.

Definizione 3.38 (Rappresentazione parametrica) Sia \mathcal{P} un poliedro di \mathbb{R}^n . Si dice rappresentazione parametrica (o rappresentazione di Minkowski) di \mathcal{P} la seguente descrizione di \mathcal{P} :

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = L\boldsymbol{\lambda} + R\boldsymbol{\mu} + V\boldsymbol{\nu} \text{ con } \lambda_i \in \mathbb{R}, \mu_i, \nu_i \in \mathbb{R}_+, \sum_i \nu_i = 1 \right\}^1,$$

dove L è una matrice che ha per colonne delle rette di \mathcal{P} , R è una matrice che ha per colonne dei raggi di \mathcal{P} e V una matrice che ha per colonne dei punti di \mathcal{P} .

$\mathbf{G} = (L, R, V)$ è detto sistema di generatori di \mathcal{P} e con $\mathcal{P}(\mathbf{G})$ si indica il poliedro generato da L, R e V .

Se un poliedro contiene raggi estremali e vertici, allora questi devono essere sulle colonne delle matrici R e V , rispettivamente: per questo motivo, abbiamo scelto di indicare con V la matrice che contiene dei punti di \mathcal{P} .

¹Le dimensioni dei vettori dei coefficienti $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\nu}$ dipendono dal numero di colonne delle matrici L, R e V .

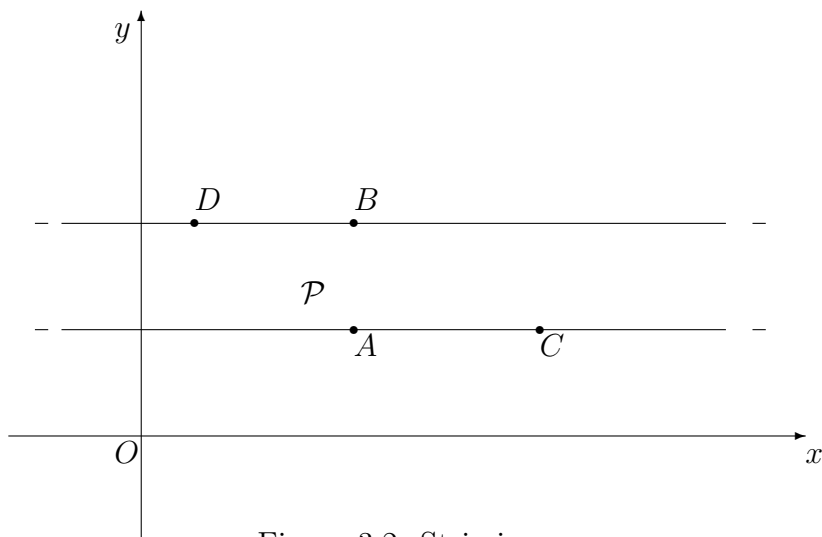


Figura 3.2: Striscia.

Notiamo che la Definizione 3.38 lascia un vasto margine di scelta per individuare i generatori che sono necessari per la rappresentazione parametrica del poliedro \mathcal{P} . Infatti, dicendo che nella rappresentazione sono necessari dei punti del poliedro, non viene fornito un metodo formale per la scelta di quali punti sono necessari nel caso in cui il poliedro non abbia vertici. Lo stesso problema si riscontra nella scelta dei raggi: l'insieme dei raggi R deve contenere almeno tutti i raggi estremali di \mathcal{P} se si possono individuare raggi di questo tipo e, in caso contrario, deve contenere un numero finito di raggi, ma non è specificato quali. Questo problema si riscontra ad esempio considerando il poliedro \mathcal{P} in Figura 3.2. Per descrivere questa striscia è sicuramente necessaria la retta di direzione $(1, 0)$ e questa è unica a meno di un fattore di proporzionalità. Più arbitraria è la scelta dei punti: infatti, \mathcal{P} non contiene vertici e quindi per rappresentare \mathcal{P} si possono considerare, ad esempio, i punti A e B , ma anche C e D o A, B e C oppure A, B e D .

Questo problema verrà risolto successivamente con l'algoritmo di Chernikova (nel capitolo 4) che fornisce, un metodo per calcolare i generatori di un poliedro a partire dai vincoli, oppure i vincoli conoscendo i generatori.

Rappresentazione dei politopi e dei coni poliedrali

Definizione 3.39 (Politopo) *Un politopo (convesso) è un poliedro che si può ottenere come involucro convesso di un numero finito di punti.*

Un esempio di politopo in \mathbb{R}^2 è il triangolo descritto in Figura 3.3.

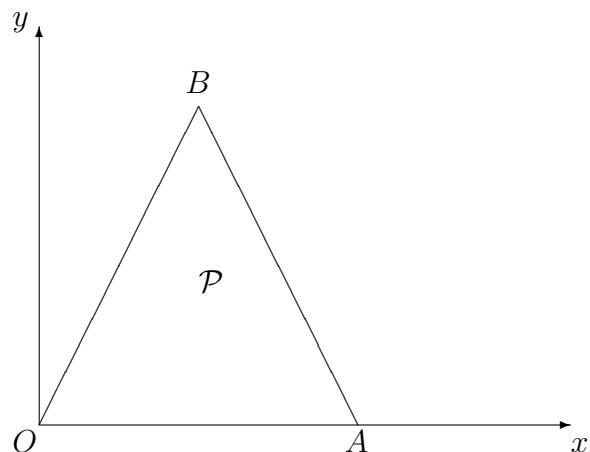


Figura 3.3: Politopo.

Definizione 3.40 (Cono poliedrale) Si definisce cono poliedrale (di apice l'origine) ogni poliedro \mathcal{C} tale che, considerando un generico $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$

$$\lambda \mathbf{x} \in \mathcal{C},$$

per ogni $\lambda \geq 0$.

Un cono poliedrale si dice puntato se e solo se l'origine è un vertice.

La rappresentazione tramite vincoli di un cono poliedrale è del tipo:

$$\mathcal{C} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}, C\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}.$$

Osservazione 3.41 Sia $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ un cono poliedrale. Allora \mathcal{C} è puntato se e solo se non contiene rette.

Osservazione 3.42 Sia $\mathcal{C} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$ un cono poliedrale di \mathbb{R}^n . La matrice A ha rango n se e solo se il cono \mathcal{C} è puntato.

DIMOSTRAZIONE: Sia $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ un cono poliedrale e supponiamo che la matrice A formata dalle disequazioni che definiscono \mathcal{C} abbia rango n . Ciò significa che l'equazione matriciale $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ha una ed una sola soluzione coincidente con il vettore nullo. Ora bisogna dimostrare che $\mathbf{0}$ è un vertice, cioè non si può ottenere come combinazione convessa di altri punti di \mathcal{C} . Se per assurdo ciò non fosse vero, esisterebbero due punti \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 di \mathcal{C} distinti

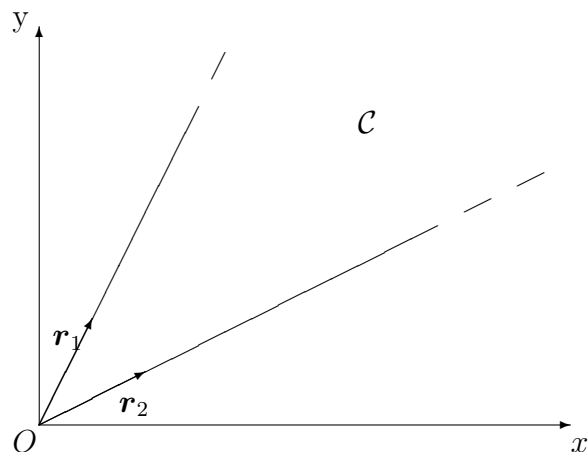


Figura 3.4: Cono puntato nell'origine.

da $\mathbf{0}$ tali che $\mathbf{0} = \lambda \mathbf{x}_1 + \mu \mathbf{x}_2$ con $\lambda, \mu > 0$ e tali che $\lambda + \mu = 1$. Si avrebbe che:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= A\mathbf{0} = A(\lambda \mathbf{x}_1 + \mu \mathbf{x}_2) \\ &= \lambda A\mathbf{x}_1 + \mu A\mathbf{x}_2. \end{aligned}$$

Si osserva che $A\mathbf{x}_1 \geq \mathbf{0}$ e $A\mathbf{x}_2 \geq \mathbf{0}$, perché \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 sono punti di \mathcal{C} : per avere che $\mathbf{0} = \lambda A\mathbf{x}_1 + \mu A\mathbf{x}_2$, deve perciò accadere che $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ e $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$. In questo modo abbiamo altri due punti che soddisfano l'equazione matriciale $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e si giunge ad un assurdo perché questa equazione ha una ed una sola soluzione.

Viceversa, sia \mathcal{C} un cono poliedrale puntato di \mathbb{R}^n . Per quanto abbiamo precedentemente osservato, \mathcal{C} non contiene rette: non esiste nessun vettore $\mathbf{v} \in \mathcal{C}$ distinto dal vettore nullo tale che $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ha quindi una ed una sola soluzione coincidente con il vertice di \mathcal{C} : questa proprietà del sistema implica che il rango della matrice A è n . \square

Nel seguito quando parleremo solamente di cono, ci riferiremo ad un cono poliedrale di apice l'origine.

Esempio 3.43 Forniamo ora alcuni esempi sugli ultimi concetti proposti. Il semispazio di \mathbb{R}^2 formato dalle ordinate positive e cioè

$$S = \{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0 \}$$

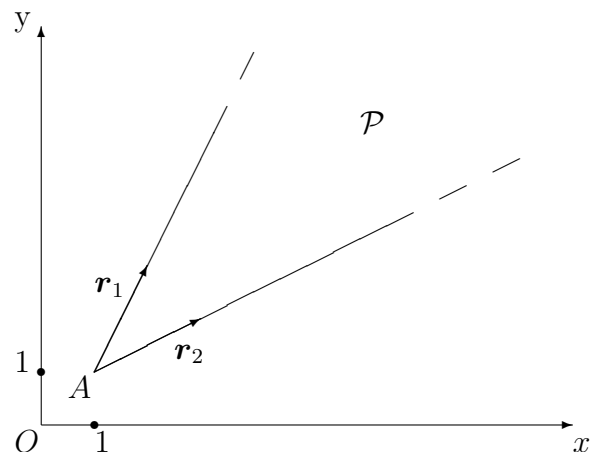


Figura 3.5: Poliedro con vertice in $A = (1, 1)^T$.

è un cono poliedrale non puntato. Un insieme di generatori di questo cono contiene un punto (cioè l'apice) che coincide con l'origine, una retta di direzione $(1, 0)^T$ e un raggio di direzione $(0, 1)^T$.

La scelta del punto e del raggio contenuti nell'insieme dei generatori non è unica, mentre quella della retta è unica a meno di un fattore di proporzionalità. Infatti, invece di scegliere nella rappresentazione parametrica come punto proprio l'origine si potrebbe prendere un qualsiasi punto dell'asse delle ascisse, mentre il raggio deve essere scelto solamente in modo che giaccia nel semispazio aperto definito dalla disequazione $y > 0$.

Un cono puntato nell'origine, invece, è ad esempio il cono presentato in Figura 3.4: per descrivere questo cono in modo parametrico sono necessari, oltre al vertice che coincide con l'origine, i due raggi estremali, cioè \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 . Se trasliamo il cono puntato appena descritto nel punto $A = (1, 1)$ otteniamo un poliedro \mathcal{P} caratterizzato dal vertice A e dai due raggi estremali \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 ed è rappresentato in Figura 3.5. Il poliedro \mathcal{P} non è un cono, perché se consideriamo $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$, allora $0 \cdot \mathbf{x} \notin \mathcal{P}$.

Esempio 3.44 Il poliedro $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $\mathcal{P} = \emptyset$ si dice poliedro vuoto. La sua rappresentazione implicita è formata da un sistema di vincoli che non ha soluzione, mentre la sua rappresentazione parametrica è caratterizzata da un sistema vuoto di generatori.

Consideriamo ora $\mathcal{P} = \mathbb{R}^n$: questo si dice poliedro universo. Un sistema di generatori che lo determina è composto da rette che hanno le direzioni coincidenti con i versori dell'insieme $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, dove con \mathbf{e}_i si indica la

n -upla in cui solo l'elemento i -esimo è uguale a 1, mentre tutti gli altri sono nulli e da un generico punto di \mathbb{R}^n , che possiamo scegliere coincidente con l'origine. Questo è corretto in quanto la combinazione lineare di queste rette definisce l'intero spazio \mathbb{R}^n . Il sistema di vincoli corrispondente è vuoto perché tutti i punti di \mathbb{R}^n fanno parte del poliedro.

Definizione 3.45 (Cono generato da un insieme) Sia $Q \subseteq \mathbb{R}^n$. Si definisce cono generato dall'insieme Q (o piramide convessa² generata da Q) e si indica con $\text{cone}(Q)$ l'insieme di tutte le combinazioni lineari positive degli elementi di Q .

I vettori di Q si dicono raggi di $\text{cone}(Q)$.

3.2.2 Omogeneizzazione di un poliedro

Per definire la rappresentazione implicita dei poliedri abbiamo utilizzato sistemi non omogenei: l'operazione di omogeneizzazione consente di passare da sistemi non omogenei a quelli omogenei, e quindi da poliedri a coni poliedrali.

Per far questo supponiamo di considerare un poliedro $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ di dimensione k definito nel modo seguente:

$$\mathcal{P} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, C\mathbf{x} \geq \mathbf{d} \},$$

dove la matrice $A \in \mathfrak{M}_{m_1, n}$ e il vettore $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m_1}$ determinano l'insieme delle equazioni e $C \in \mathfrak{M}_{m_2, n}$ e il vettore $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{m_2}$ l'insieme delle disequazioni. Lo stesso poliedro si può scrivere anche nel modo seguente:

$$\mathcal{P} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{0}, C\mathbf{x} - \mathbf{d} \geq \mathbf{0} \}.$$

La tecnica dell'omogeneizzazione permette di individuare un nuovo poliedro, che in realtà è un cono poliedrale (di apice l'origine), $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ di dimensione $k + 1$. Per far questo possiamo considerare l'immersione di \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^{n+1}

$$\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

tale che

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

²La nozione di piramide convessa è stata introdotta in [Wey50].

Quindi, per individuare il poliedro omogeneizzato, dobbiamo per prima cosa considerare il poliedro $\hat{\mathcal{P}} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ tale che $\hat{\mathcal{P}} = \Phi(\mathcal{P})$. Si consideri il cono

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{ (\mathbf{x}^T, \xi)^T \in \mathbb{R}^{n+1} \mid A\mathbf{x} - \mathbf{b}\xi = \mathbf{0}, C\mathbf{x} - \mathbf{d}\xi \geq \mathbf{0}, \xi \geq 0 \} \\ &= \left\{ (\mathbf{x}^T, \xi)^T \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \begin{pmatrix} A & -\mathbf{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \xi \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \begin{pmatrix} C & -\mathbf{d} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \xi \end{pmatrix} \geq \mathbf{0} \right\} \\ &= \{ \hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \hat{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}, \hat{C}\hat{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0} \} \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \xi \end{pmatrix}, \\ \hat{A} &= (A \quad -\mathbf{b}), \\ \hat{C} &= \begin{pmatrix} C & -\mathbf{d} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

\mathcal{C} è il cono ottenuto tramite la tecnica di omogeneizzazione tale che

$$\hat{\mathcal{P}} = \mathcal{C} \cap \Phi(\mathbb{R}^n).$$

Si osserva che se $A \in \mathfrak{M}_{m_1, n}$ e $C \in \mathfrak{M}_{m_2, n}$, la nuova matrice \hat{A} appartiene all'insieme $\mathfrak{M}_{m_1, n+1}$ e \hat{C} all'insieme $\mathfrak{M}_{m_2+1, n+1}$. Infine, applicando a $\hat{\mathcal{P}}$ la trasformazione Φ^{-1} si riottiene il poliedro \mathcal{P} .

Ora mostriamo come a partire dalla rappresentazione parametrica di $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ si può ottenere quella del cono poliedrale $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ottenuto omogeneizzando \mathcal{P} : il cono \mathcal{C} è il più piccolo poliedro che contiene tutte le semirette che hanno origine in $\mathbf{0}$ e che passano per almeno un punto del poliedro $\hat{\mathcal{P}}$. Si osserva che mentre i raggi e le rette del poliedro si trasformano in raggi e rette, rispettivamente, del cono poliedrale, mantenendo così la loro natura, i punti si trasformano in raggi. Il punto del poliedro \mathcal{P}

$$\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^T.$$

si trasforma nel raggio del cono \mathcal{C}

$$\hat{\mathbf{r}}_v = (\lambda v_1, \dots, \lambda v_n, \lambda)^T$$

con $\lambda > 0$, perché il cono \mathcal{C} contiene le semirette che hanno origine in $\mathbf{0}$ e passano per \mathbf{v} . Se consideriamo, invece, il raggio del poliedro

$$\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)^T,$$

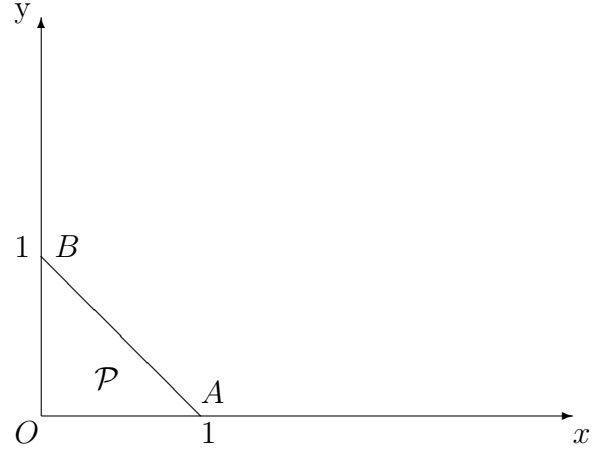


Figura 3.6: Triangolo rettangolo isoscele.

questo si trasforma in

$$\hat{\mathbf{r}} = (r_1, \dots, r_n, 0)^T.$$

Infine, la retta del poliedro

$$\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_n)^T$$

diventa

$$\hat{\mathbf{l}} = (l_1, \dots, l_n, 0)^T.$$

Infatti, se consideriamo il punto $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$, allora $(\mathbf{x}^T, 1)^T$ appartiene a $\hat{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{C}$. Inoltre, anche $\mathbf{x} + \mu\mathbf{r} \in \hat{\mathcal{P}}$ se $\mu \geq 0$ e \mathbf{r} raggio di \mathcal{P} . Allora

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} + \mu\mathbf{r} \\ 1 \end{pmatrix} \in \hat{\mathcal{P}},$$

e questo punto si può anche scrivere come

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} + \mu\mathbf{r} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ 0 \end{pmatrix} \in \hat{\mathcal{P}}.$$

Quindi $(\mathbf{r}^T, 0)^T$ è un raggio per $\hat{\mathcal{P}}$ e per \mathcal{C} . Per la Definizione 3.36, quello che abbiamo appena dimostrato permette di verificare anche il caso delle rette.

Esempio 3.46 Consideriamo il triangolo rettangolo isoscele \mathcal{P} rappresentato in Figura 3.6. La sua rappresentazione implicita può essere scritta nel

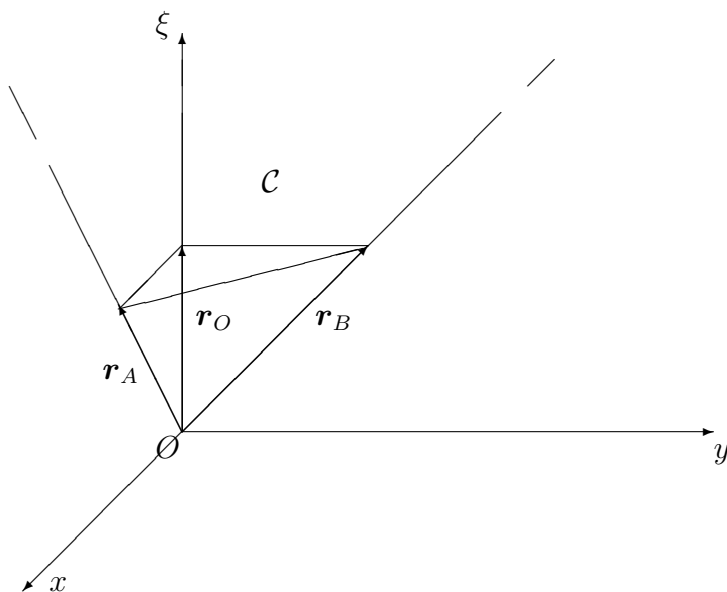


Figura 3.7: Cono individuato dall'omogeneizzazione del triangolo della Figura 3.6.

modo seguente:

$$\mathcal{P} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Nel poliedro \mathcal{P} si individuano tre vertici: $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$ e $B = (0, 1)$. Quindi la sua rappresentazione parametrica è

$$\mathcal{P} = \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \nu_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \nu_1, \nu_2, \nu_3 \in \mathbb{R}_+, \sum_{i=1}^3 \nu_i = 1 \right\}.$$

La rappresentazione implicita del cono $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^3$ ottenuto omogeneizzando \mathcal{P} è la seguente:

$$\mathcal{C} = \left\{ (x, y, \xi)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \xi \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Abbiamo visto che, omogeneizzando, i vertici si trasformano in raggi. Nel

caso specifico i vertici O , A e B si trasformano nei raggi

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_O &= (0, 0, 1)^T, \\ \mathbf{r}_A &= (1, 0, 1)^T, \\ \mathbf{r}_B &= (0, 1, 1)^T.\end{aligned}$$

Esempio 3.47 Si consideri il poliedro $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}$ descritto da

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}.$$

La rappresentazione parametrica di \mathcal{P} è

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 1 + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}_+\},$$

perché \mathcal{P} ha un vertice nel punto $V = (1)$ e un raggio \mathbf{r} di direzione x .

Il cono $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^2$ ottenuto omogeneizzando \mathcal{P} è

$$\mathcal{C} = \left\{ (x, \xi)^T \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Inoltre, la sua rappresentazione parametrica è

$$\mathcal{C} = \left\{ (x, \xi)^T \in \mathbb{R}^2 \mid (x, \xi)^T = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+ \right\},$$

dove $(1, 1)^T$ e $(1, 0)^T$ sono i raggi ottenuti, rispettivamente, dal vertice V e dal raggio \mathbf{r} di \mathcal{P} .

Nel seguito, enunceremo e dimostreremo alcuni teoremi dapprima nel caso di coni poliedrali e poi nel caso di poliedri usando l'omogeneizzazione. La suddivisione di questi teoremi in due casi, consente di semplificare gli enunciati e le dimostrazioni, perché se consideriamo solamente i coni poliedrali, questi hanno un solo vertice, se sono puntati, o è necessario solamente un suo punto per descriverlo, se contengono rette.

3.2.3 Teoremi di Minkowski e di Weyl

I teoremi di Minkowski e di Weyl dimostrano che a partire da un poliedro definito tramite un sistema di vincoli è possibile fornire una rappresentazione parametrica e viceversa (cioè passare dai generatori ai vincoli). Per presentare e dimostrare questi teoremi seguiamo la tecnica proposta in [Wey50] e in [NW88].

Definizione 3.48 (Somma di Minkowski) Siano $R, S \subseteq \mathbb{R}^n$. La somma di Minkowski di R e S si indica con $R + S$ ed è definita come segue:

$$R + S = \{ \mathbf{r} + \mathbf{s} \mid \mathbf{r} \in R, \mathbf{s} \in S \}.$$

Si può osservare che se $R = \emptyset$ oppure $S = \emptyset$, allora $R + S = \emptyset$.

Definizione 3.49 (Insieme non degenere) Un insieme finito $S \subseteq \mathbb{R}^n$ viene detto non degenere se tutti i suoi punti non si trovano su uno stesso iperpiano.

Definizione 3.50 (Supporto di un insieme) Sia $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme finito e non degenere. Un semispazio determinato da

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$$

con $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ vettore non nullo, si dice supporto per S se tutti i punti di S appartengono al semispazio, cioè soddisfano la disequazione che lo descrive; il vettore \mathbf{a} è detto vettore supporto per S . Un supporto di S si dice supporto estremo se vale l'uguaglianza per $n - 1$ punti linearmente indipendenti di S ; in questo caso il vettore \mathbf{a} è detto vettore supporto estremo.

Vi sono solamente un numero finito di supporti estremi per S . Questi possono essere individuati scegliendo tutte le possibili combinazioni di $n - 1$ punti linearmente indipendenti di S e individuando l'equazione $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = 0$ che descrive l'iperpiano a cui appartengono gli $n - 1$ punti che stiamo considerando. Solamente $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ o $\langle -\mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ è soddisfatta da tutti i punti di S : la disequazione soddisfatta da tutti i punti di S genera un supporto estremo di S .

Enunciamo e dimostriamo il seguente teorema:

Teorema 3.51 (Teorema fondamentale)[Wey50] Sia $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme finito e non degenere. Un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ che soddisfa tutte le disequazioni determinate dai supporti estremi di S , può essere espresso come combinazione positiva dei punti di S .

DIMOSTRAZIONE: La dimostrazione di questo teorema si può dividere in due parti: il caso in cui l'insieme $S = \{\mathbf{a}_i\}_{i=1,\dots,k}$ ha supporti estremi e quello in cui non ne ha.

Caso a) Consideriamo il caso in cui l'insieme S abbia supporti estremi e procediamo per induzione.

Supponiamo $n = 1$; allora gli unici supporti estremi hanno la forma $x_1 \geq 0$ oppure $-x_1 \geq 0$. Inoltre, S non si riduce all'insieme formato solamente da 0, perché per ipotesi S è non degenere. Ogni punto di \mathbb{R} che soddisfa la disequazione $x_1 \geq 0$ si può scrivere come multiplo positivo di un punto di S . In modo analogo si dimostra il caso in cui il supporto estremo sia $-x_1 \geq 0$.

Supponiamo ora che il teorema valga in dimensione $n - 1$ e dimostriamo che vale in \mathbb{R}^n .

Chiamiamo α_i i vettori non nulli che sono i vettori supporti estremi di S : supponiamo che essi siano N . Indichiamo con $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ un punto che soddisfa tutti i vettori supporti estremi di S :

$$\langle \alpha_i, \mathbf{p} \rangle \geq 0,$$

per $i = 1, \dots, N$. Vogliamo dimostrare che si può esprimere \mathbf{p} tramite un combinazione positiva degli elementi dell'insieme S .

Sia α_s con $s \in \{1, \dots, N\}$ un vettore supporto estremo di S . Allora esiste un $\mathbf{a}_t \in S$ tale che $\langle \alpha_s, \mathbf{a}_t \rangle > 0$: non tutti i punti soddisfano l'equazione $\langle \alpha_s, \mathbf{x} \rangle = 0$, perché l'insieme S è non degenere.

Definiamo il vettore

$$\mathbf{q} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{p} - \lambda \mathbf{a}_t,$$

con $\lambda \geq 0$. Per ottenere che \mathbf{q} appartenga ai supporti estremi di S , e cioè

$$\langle \alpha_i, \mathbf{q} \rangle = \langle \alpha_i, \mathbf{p} \rangle - \lambda \langle \alpha_i, \mathbf{a}_t \rangle \geq 0,$$

per ogni $i = 1, \dots, N$, possiamo scegliere λ come

$$\lambda = \min_{i \in I} \left\{ \frac{\langle \alpha_i, \mathbf{p} \rangle}{\langle \alpha_i, \mathbf{a}_t \rangle} \right\},$$

con $I = \{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq N, \langle \alpha_i, \mathbf{a}_t \rangle \neq 0\}$ e $I \neq \emptyset$, perché per quello che abbiamo supposto almeno α_s è tale che $\langle \alpha_s, \mathbf{a}_t \rangle > 0$. Queste frazioni esistono tutte in quanto sicuramente il denominatore è diverso da zero per la scelta dei vettori α_i ; il valore λ è sicuramente non negativo perché il denominatore è positivo e il numeratore è non negativo. Supponiamo che il minimo di questi valori sia raggiunto in corrispondenza della disequazione determinata da α_{i_0} :

$$\lambda = \frac{\langle \alpha_{i_0}, \mathbf{p} \rangle}{\langle \alpha_{i_0}, \mathbf{a}_t \rangle}.$$

Per come abbiamo scelto λ , il vettore \mathbf{q} giace sull'iperpiano generato da $\boldsymbol{\alpha}_{i_0}$, perché

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{\alpha}_{i_0}, \mathbf{q} \rangle &= \langle \boldsymbol{\alpha}_{i_0}, \mathbf{p} \rangle - \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}_{i_0}, \mathbf{p} \rangle}{\langle \boldsymbol{\alpha}_{i_0}, \mathbf{a}_t \rangle} \langle \boldsymbol{\alpha}_{i_0}, \mathbf{a}_t \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{\alpha}_{i_0}, \mathbf{p} \rangle - \langle \boldsymbol{\alpha}_{i_0}, \mathbf{p} \rangle = 0.\end{aligned}$$

Se dimostriamo che \mathbf{q} è esprimibile con una combinazione positiva degli elementi di S , allora anche \mathbf{p} lo è, perché $\mathbf{p} = \mathbf{q} + \lambda \mathbf{a}_t$ e $\lambda \geq 0$. Per come è stato definito, \mathbf{q} soddisfa tutte le disequazioni e almeno un'equazione che per le ipotesi fatte è $\boldsymbol{\alpha}_{i_0}$.

Senza perdere di generalità, si può supporre che l'equazione soddisfatta da \mathbf{q} abbia la forma

$$\langle \boldsymbol{\alpha}_{i_0}, \mathbf{x} \rangle = x_n = 0, \quad (3.4)$$

perché si può costruire una trasformazione ortogonale³ tale che manda $\boldsymbol{\alpha}_{i_0}$ nel vettore $(0, \dots, 0, 1)^T$.

Tutti i punti di S soddisfano la disequazione $x_n \geq 0$ (per le ipotesi fatte). Sia S_0 l'insieme dei punti di S per cui $x_n = 0$ e raggruppiamo gli altri punti di S nell'insieme S' . L'insieme S_0 contiene $n - 1$ punti linearmente indipendenti perché $x_n \geq 0$ è un supporto estremo.

Se identifichiamo l'iperpiano π descritto dall'equazione $x_n = 0$ con \mathbb{R}^{n-1} , allora S_0 è non degenere in π . Ora consideriamo in π l'insieme S_0 e supponiamo che la disequazione

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1} \geq 0 \quad (3.5)$$

sia determinata da un vettore supporto estremo $\boldsymbol{\alpha}$ per S_0 . Dimostriamo che \mathbf{q} soddisfa questa disequazione. Consideriamo la disequazione

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1} - \mu x_n \geq 0. \quad (3.6)$$

Se è soddisfatta da tutti i punti di S' , allora vale per tutti i punti di S , perché $S = S_0 \cup S'$ e la disequazione determinata dal vettore $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 0)^T$ genera un supporto estremo per S_0 . Per ottenere questo risultato, definiamo il valore μ come

$$\mu = \min_{\mathbf{x} \in S'} \frac{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1}}{x_n}.$$

Supponiamo ora che il minimo sia assunto nel punto $\mathbf{a}_r \in S'$. La disequazione (3.6) è generata da un vettore supporto estremo per S , perché l'equazione

³Una trasformazione ortogonale in \mathbb{R}^n è una trasformazione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, tale che $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $AA^T = A^T A = I$.

corrispondente alla (3.6) vale per $n - 2$ punti indipendenti di S_0 e per il punto \mathbf{a}_r di S' che non giace in \mathbb{R}^{n-1} . Di conseguenza \mathbf{q} soddisfa la disequazione (3.6) e quindi la (3.5). Per l'ipotesi induttiva, \mathbf{q} si può esprimere tramite i punti di S_0 e quindi \mathbf{p} tramite quelli di S .

Caso b) Consideriamo ora il caso in cui l'insieme S non abbia supporti estremi e dimostriamo anche questo caso per induzione.

Per $n = 1$, l'ipotesi che S non abbia supporti estremi implica che deve esistere almeno un elemento $\mathbf{a}_+ \in S$ che appartiene ad $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ e un $\mathbf{a}_- \in S$ che appartiene alla semiretta negativa delle ascisse. Anche in questo caso un generico punto di \mathbb{R} si può scrivere come multiplo positivo di un punto di S .

Supponiamo ora che il teorema valga nel caso $(n - 1)$ -dimensionale e dimostriamo che vale per \mathbb{R}^n . Consideriamo il vettore $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ che determina un semispazio tramite la disequazione

$$\langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$$

tale che l'iperpiano π descritto dall'equazione $\langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x} \rangle = 0$ passi per $n - 1$ punti linearmente indipendenti di S . Senza perdere di generalità supponiamo che l'equazione $\langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x} \rangle = 0$ sia della forma $x_n = 0$. Indichiamo con π^+ il semispazio definito dalla disequazione $\langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ e con π^- quello descritto da $\langle -\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$. Per ipotesi, esiste almeno un punto $\mathbf{e} \in S$ tale che $\mathbf{e} \in \pi^- \setminus \pi$, cioè

$$\langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{e} \rangle < 0$$

ed esiste un $\mathbf{e}' \in S$ tale che $\mathbf{e}' \in \pi^+ \setminus \pi$, cioè

$$\langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{e}' \rangle > 0.$$

Indichiamo con S_0 l'insieme finito formato dai punti di S che appartengono a π e da quelli individuati tramite l'intersezione di π con i segmenti di estremi un punto di $S \cap (\pi^+ \setminus \pi)$ e un punto di $S \cap (\pi^- \setminus \pi)$. Per prima cosa si osserva che S_0 è non degenere, per costruzione. Inoltre, l'insieme S_0 non ha supporti estremi. Infatti, supponiamo per assurdo che il vettore $\boldsymbol{\alpha}_0 = (\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_{n-1}, 0)^T$ sia un vettore supporto estremo di S_0 . Consideriamo il vettore $\boldsymbol{\alpha}_\mu = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, -\mu)^T$ con $\mu \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $\mathbf{x} \in S \cap \pi^+$

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1} - \mu x_n \geq 0.$$

Per ottenere questo risultato, scegliamo di definire il valore μ come

$$\mu = \min_{\mathbf{x} \in S \cap (\pi^+ \setminus \pi)} \frac{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1}}{x_n}$$

e supponiamo per ipotesi che questo minimo sia assunto in $\bar{\mathbf{p}}$. Per l'ipotesi che S non ha supporti estremi, esiste un punto $\mathbf{p} \in S \cap (\pi^- \setminus \pi)$ tale che

$$\alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_{n-1} p_{n-1} + \mu p_n < 0.$$

Il punto intersezione di π e del segmento di estremi \mathbf{p} e $\bar{\mathbf{p}}$ appartiene a S_0 , ma non soddisfa la disequazione $\langle \boldsymbol{\alpha}_\mu, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ che era un supporto estremo di S_0 e quindi si ha un assurdo. Se identifichiamo l'iperpiano π con \mathbb{R}^{n-1} , allora in π vale l'ipotesi induttiva e quindi ogni punto di π si può scrivere come combinazione positiva dei punti di S_0 . Per come sono stati costruiti i punti di S_0 , allora tutti i punti di \mathbb{R}^n (che soddisfano i supporti estremi di S) si possono scrivere come combinazione positiva dei punti di S . □

Osservazione 3.52 *Sia $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme finito e non degenero. Un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ che soddisfa tutte le disequazioni determinate dai supporti estremi di S , può essere espresso come combinazione positiva di al più n punti di S .*

Sia $S = \{\mathbf{a}_i\}_{i=1,\dots,k}$ un insieme finito; si può definire un sistema di disequazioni:

$$\mathcal{S} : \begin{cases} \langle \mathbf{a}_1, \boldsymbol{\xi} \rangle \geq 0 \\ \langle \mathbf{a}_2, \boldsymbol{\xi} \rangle \geq 0 \\ \vdots \\ \langle \mathbf{a}_k, \boldsymbol{\xi} \rangle \geq 0 \end{cases}. \quad (3.7)$$

Se S è non degenero allora non esiste nessuno $\boldsymbol{\xi}$, tranne $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ che soddisfa l'uguaglianza in tutte le disequazioni del sistema (3.7). Si osserva che $\boldsymbol{\xi}$ è *vettore supporto dei punti di S* se soddisfa il sistema (3.7) e cioè appartiene all'insieme

$$\text{sol}(\mathcal{S}) = \{ \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{\xi} \text{ soluzione del sistema (3.7)} \}.$$

Di conseguenza, si può affermare che:

Teorema 3.53 (Lemma di Farkas) *Se $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ è tale che $\langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\xi} \rangle \geq 0$ per ogni $\boldsymbol{\xi} \in \text{sol}(\mathcal{S})$, allora la forma lineare $\langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\xi} \rangle$ nella variabile $\boldsymbol{\xi}$ può essere scritta come combinazione positiva delle forme lineari $\langle \mathbf{a}_i, \boldsymbol{\xi} \rangle$, con $i = 1, \dots, k$ e $\mathbf{a}_i \in S$.*

DIMOSTRAZIONE: Dato l'insieme $S = \{\mathbf{a}_i\}_{i=1,\dots,k}$, l'insieme $\text{sol}(\mathcal{S})$, formato da tutte le soluzioni del sistema (3.7), contiene i supporti che definiscono S : in particolare contiene anche tutti i supporti estremi. Dal momento

che $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ è tale che $\langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\xi} \rangle \geq 0$ per ogni $\boldsymbol{\xi} \in \text{sol}(\mathcal{S})$, allora appartiene anche a tutti i supporti estremi che definiscono S . Per il Teorema 3.51, \mathbf{p} può essere scritto come combinazione positiva dei punti di S e quindi la forma lineare $\langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\xi} \rangle$ nella variabile $\boldsymbol{\xi}$ può essere scritta come combinazione positiva delle forme lineari $\langle \mathbf{a}_i, \boldsymbol{\xi} \rangle$, con $i = 1, \dots, k$. \square

Presentiamo e dimostriamo il teorema di Minkowski inizialmente nel caso di coni poliedrali puntati, poi per i coni poliedrali ed infine per i poliedri in generale. Per dimostrare quest'ultimo caso useremo la tecnica dell'omogeneizzazione vista nella sezione 3.2.2 che permette di associare ad ogni poliedro un cono poliedrale e viceversa.

Il teorema di Minkowski fornisce a partire dalla rappresentazione tramite i vincoli la rappresentazione parametrica (o *rappresentazione di Minkowski*) del poliedro.

Teorema 3.54 (Teorema di Minkowski per coni puntati) *Sia $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ un cono poliedrale puntato non vuoto*

$$\mathcal{C} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}, C\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$$

dove $A \in \mathfrak{M}_{m_1, n}$ e $C \in \mathfrak{M}_{m_2, n}$. Allora

$$\mathcal{C} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = \sum_{j \in J} \mu_j \mathbf{r}_j, \text{ con } \mu_j \geq 0 \text{ per ogni } j \in J \}$$

dove $\{\mathbf{r}_j\}_{j \in J}$ è un insieme finito di raggi estremali di \mathcal{C} .

DIMOSTRAZIONE: Sia

$$Q = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = \sum_{j \in J} \mu_j \mathbf{r}_j, \text{ con } \mu_j \in \mathbb{R}_+ \text{ per ogni } j \in J \}.$$

Poiché \mathbf{r}_j per ogni $j \in J$ sono raggi di \mathcal{C} , allora $\sum_{j \in J} \mu_j \mathbf{r}_j \in \mathcal{C}$ per ogni $\mu_j \geq 0$ con $j \in J$. Quindi $Q \subseteq \mathcal{C}$.

Ora consideriamo un $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ e dobbiamo dimostrare che $\mathbf{x} \in Q$. Indichiamo con R l'insieme $\{\mathbf{r}_j\}_{j \in J}$: questo è un insieme finito. Inoltre, si può supporre che R sia anche non degenera. Infatti, se R fosse degenera, tutti i raggi appartenerebbero ad un iperpiano: se consideriamo, però, questo iperpiano come lo spazio a cui appartengono i raggi, allora l'insieme dei raggi non è più degenera in questo nuovo spazio. Quindi se R è degenera è sufficiente ricondursi ad un sottospazio di dimensione minore e avere in questo modo un insieme non degenera.

Per il Teorema 3.51, ogni punto \mathbf{x} del cono \mathcal{C} può essere espresso tramite una combinazione positiva dei punti di R

$$\mathbf{x} = \sum_{j \in J} \mu_j \mathbf{r}_j,$$

con $\mu_j \geq 0$, per ogni $j \in J$, perché ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ appartiene a tutti i supporti estremi che definiscono R . Si ha perciò che $\mathbf{x} \in Q$ e quindi \mathbf{x} può essere scritto come combinazione positiva dei raggi contenuti nell'insieme R .

Ora dimostriamo che possiamo considerare solamente l'insieme formato dai raggi estremali: sono necessari nella rappresentazione perché in caso contrario non si potrebbero descrivere i loro punti. Dividiamo ora l'insieme R negli insiemi R_1 e R_2 : il primo formato solamente dai raggi estremali e il secondo dai raggi non estremali. Ogni $\mathbf{r} \in R_2$ si può scrivere come

$$\mathbf{r} = \sum_{\mathbf{r}_i \in R_1} \alpha_i \mathbf{r}_i + \sum_{\mathbf{r}_j \in R_2 \setminus \{\mathbf{r}\}} \alpha_j \mathbf{r}_j :$$

quindi \mathbf{r} non è necessario alla rappresentazione e quindi si può eliminare dall'insieme R . Procedendo in questo modo con tutti gli elementi di R_2 , si arriva al caso in cui R_2 sia solamente formato da un elemento. Questo può essere eliminato, perché si può scrivere con una combinazione positiva dei soli elementi di R_1 . In questo modo abbiamo dimostrato che sono necessari solamente i raggi estremali del cono puntato. \square

Teorema 3.55 *Ogni cono $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ si può scrivere in modo unico come*

$$\mathcal{C} = \mathcal{L} + \bar{\mathcal{C}}$$

dove \mathcal{L} è l'insieme delle rette di \mathcal{C} e $\bar{\mathcal{C}} = \mathcal{L}^\perp \cap \mathcal{C}$ con \mathcal{L}^\perp l'ortogonale⁴ a \mathcal{L} .

DIMOSTRAZIONE: Si può osservare⁵ che $\mathbb{R}^n = \mathcal{L} + \mathcal{L}^\perp$. Quindi ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ si può scrivere in modo unico come $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$ con $\mathbf{y} \in \mathcal{L}$ e $\mathbf{z} \in \mathcal{L}^\perp$. Se $\mathbf{z} \in \mathcal{C}$, allora $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ poiché $\mathbf{y} \in \mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}$. Viceversa, se $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, allora $\mathbf{z} \in \mathcal{C}$, poiché $-\mathbf{y} \in \mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}$ e $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$. In questo modo abbiamo dimostrato che $\mathcal{L} + \bar{\mathcal{C}} = \mathcal{C}$.

⁴Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. L'insieme formato dai vettori ortogonali a tutti gli elementi di A è detto *ortogonale* di A e si indica con A^\perp

⁵Per [SW70, Chapter 2, Theorem 2.6.11, pag.50] sappiamo che per ogni sottospazio $L \subseteq \mathbb{R}^n$, si ha che ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ si può scrivere in modo unico come somma di un elemento di L e di uno di L^\perp .

Dobbiamo solamente dimostrare che $\bar{\mathcal{C}}$ è puntato. Per far questo dimostriamo che $\bar{\mathcal{C}}$ non ha rette, e cioè che l'unico $\mathbf{x} \in \bar{\mathcal{C}}$ tale che anche il suo opposto appartiene a $\bar{\mathcal{C}}$ è $\mathbf{0}$:

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{C}} \cap (-\bar{\mathcal{C}}) &= \mathcal{L}^\perp \cap \mathcal{C} \cap (-\mathcal{L}^\perp) \cap (-\mathcal{C}) = \\ &= \mathcal{L}^\perp \cap \mathcal{C} \cap (-\mathcal{C}) = \\ &= \mathcal{L}^\perp \cap \mathcal{L} = \{\mathbf{0}\}.\end{aligned}$$

□

Teorema 3.56 (Teorema di Minkowski per coni poliedrali) *Sia \mathcal{C} un cono poliedrale non vuoto di \mathbb{R}^n*

$$\mathcal{C} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}, C\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \},$$

allora

$$\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = \sum_{k \in K} \lambda_k \mathbf{l}_k + \sum_{j \in J} \mu_j \mathbf{r}_j, \text{ con } \lambda_k \in \mathbb{R}, \mu_j \in \mathbb{R}_+ \right\}$$

dove $\{\mathbf{l}_k\}_{k \in K}$ è un insieme finito di rette di \mathcal{C} e $\{\mathbf{r}_j\}_{j \in J}$ è un insieme finito di raggi di \mathcal{C} .

DIMOSTRAZIONE: Per dimostrare questo teorema cerchiamo di ricondurci al caso trattato nel Teorema 3.54. Se il cono non contiene rette, allora \mathcal{C} è puntato e quindi si applica il Teorema 3.54.

Supponiamo ora che \mathcal{C} contenga alcune rette. Individuiamo perciò a meno di un fattore di proporzionalità tutte le rette linearmente indipendenti che compaiono in \mathcal{C} e chiamiamo con \mathcal{L} l'insieme delle combinazioni lineari delle rette. Per il Teorema 3.55, \mathcal{C} si può scrivere come

$$\mathcal{C} = \mathcal{L} + \bar{\mathcal{C}},$$

con $\bar{\mathcal{C}} = \mathcal{L}^\perp \cap \mathcal{C}$, e $\bar{\mathcal{C}}$ è un cono puntato di \mathbb{R}^n . Per il Teorema 3.54, $\bar{\mathcal{C}}$ si può scrivere come

$$\bar{\mathcal{C}} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = \sum_{j \in J} \mu_j \mathbf{r}_j, \text{ con } \mu_j \geq 0 \text{ per ogni } j \in J \right\}.$$

Questo ci permette di scrivere che

$$\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} \mathbf{x} = \sum_{k \in K} \lambda_k \mathbf{l}_k + \sum_{j \in J} \mu_j \mathbf{r}_j, \\ \text{con } \lambda_k \in \mathbb{R} \text{ e } \mu_j \in \mathbb{R}_+ \text{ per ogni } k \in K, j \in J \end{array} \right\}.$$

□

Enunciamo e dimostriamo infine il caso di un poliedro generico.

Teorema 3.57 (Teorema di Minkowski per poliedri) Sia \mathcal{P} è un poliedro non vuoto di \mathbb{R}^n

$$\mathcal{P} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, C\mathbf{x} \geq \mathbf{d} \},$$

allora

$$\mathcal{P} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} \mathbf{x} = \sum_{k \in K} \lambda_k \mathbf{l}_k + \sum_{j \in J} \mu_j \mathbf{r}_j + \sum_{i \in I} \nu_i \mathbf{v}_i, \\ \text{con } \lambda_k \in \mathbb{R}, \mu_j, \nu_i \in \mathbb{R}_+, \sum_{i \in I} \nu_i = 1 \end{array} \right. \right\}$$

dove $\{\mathbf{l}_k\}_{k \in K}$ è un insieme finito di rette di \mathcal{C} , $\{\mathbf{r}_j\}_{j \in J}$ è un insieme finito di raggi di \mathcal{C} e $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in I}$ è un insieme finito di punti di \mathcal{C} .

DIMOSTRAZIONE: Per dimostrare quest'ultimo teorema ci vogliamo ricondurre al Teorema 3.56. Per far questo individuamo tramite l'omogeneizzazione il corrispondente cono poliedrale $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Per il Teorema 3.56, \mathcal{C} si può scrivere come

$$\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathbf{x} = \sum_{k \in K} \lambda_k \hat{\mathbf{l}}_k + \sum_{j \in J} \mu_j \hat{\mathbf{r}}_j, \text{ con } \lambda_k \in \mathbb{R}, \mu_j \in \mathbb{R}_+ \right\},$$

dove $\{\hat{\mathbf{l}}_k\}_{k \in K}$ è un insieme finito di rette di \mathcal{C} e $\{\hat{\mathbf{r}}_j\}_{j \in J}$ è un insieme finito di raggi di \mathcal{C} . Intersecando \mathcal{C} con l'iperpiano descritto dall'equazione $x_{n+1} = 1$, otteniamo il poliedro $\hat{\mathcal{P}}$; infine otteniamo il poliedro $\mathcal{P} = \Phi^{-1}(\hat{\mathcal{P}})$. Utilizzando il processo descritto nella sezione 3.2.2 otteniamo i generatori di \mathcal{P} :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \Phi^{-1}(\hat{\mathcal{P}}) = \\ &= \Phi^{-1} \left(\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathbf{x} = \sum_{k \in K} \lambda_k \hat{\mathbf{l}}_k + \sum_{j \in J} \mu_j \hat{\mathbf{r}}_j, \text{ con } \lambda_k \in \mathbb{R}, \mu_j \in \mathbb{R}_+ \right\} \cap \right. \\ &\quad \left. \cap \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 1 \right\} \right) = \\ &= \Phi^{-1} \left(\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \left| \begin{array}{l} \mathbf{x} = \sum_{k \in K} \lambda_k (\mathbf{l}_k^T, 0)^T + \sum_{j \in J_1} \mu_j (\mathbf{r}_j^T, 0)^T + \\ + \sum_{j \in J_2} \mu_j (\mathbf{r}_j^T, 1)^T, \text{ con } \lambda_k \in \mathbb{R}, \mu_j \in \mathbb{R}_+ \end{array} \right. \right\} \right) = \\ &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} \mathbf{x} = \sum_{k \in K} \lambda_k \mathbf{l}_k + \sum_{j \in J} \mu_j \mathbf{r}_j + \sum_{i \in I} \nu_i \mathbf{v}_i, \\ \text{con } \lambda_k \in \mathbb{R}, \mu_j, \nu_i \in \mathbb{R}_+ \text{ e } \sum_{i \in I} \nu_i = 1 \end{array} \right. \right\}. \end{aligned}$$

Quindi anche in questo caso la rappresentazione parametrica che abbiamo ottenuto in questo modo è unica, perché deriva da quella di un cono poliedrale che per il Teorema 3.56 è unica. \square

Osservazione 3.58 Sia $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro non vuoto. Se \mathcal{P} non contiene rette, allora

$$\mathcal{P} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} \mathbf{x} = \sum_{j \in J} \mu_j \mathbf{r}_j + \sum_{i \in I} \nu_i \mathbf{v}_i, \\ \text{con } \mu_j, \nu_i \geq 0 \text{ per ogni } j \in J, i \in I \text{ e } \sum_{i \in I} \nu_i = 1 \end{array} \right. \right\}$$

dove $\{\mathbf{r}_j\}_{j \in J}$ è l'insieme dei raggi estremali e $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in I}$ è l'insieme dei vertici.

Esempio 3.59 Proviamo a descrivere mediante la rappresentazione di Minkowski il poliedro dell'Esempio 3.31.

Dobbiamo individuare quindi le direzioni delle rette, quelle per i raggi e infine i punti che servono nella rappresentazione. Nel poliedro in esame non vi sono rette, ma si possono individuare due raggi estremali: il primo è quello di direzione $\mathbf{e}_1 = (1, 0)^T$ e l'altro ha direzione $\mathbf{e}_2 = (0, 1)^T$: inoltre, il vertice coincide con l'origine del sistema di assi cartesiani. La rappresentazione di \mathcal{P} è quindi:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{array}{l} (x, y)^T = \mu_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \mu_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \nu \cdot \mathbf{0}, \\ \text{con } \mu_1, \mu_2 \geq 0, \nu = 1 \end{array} \right. \right\} \\ &= \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y)^T = \mu_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \mu_2 \cdot \mathbf{e}_2, \text{ con } \mu_1, \mu_2 \geq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Il teorema di Weyl garantisce che partendo da un sistema di generatori che descrive un poliedro $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ è possibile individuare un sistema di vincoli che lo determina.

Teorema 3.60 (Teorema di Weyl) Consideriamo le matrici $A \in \mathfrak{M}_{m_1, n}$ e $B \in \mathfrak{M}_{m_2, n}$, e sia

$$Q = \left\{ \mathbf{x}^T \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^T = \mathbf{y}^T A + \mathbf{z}^T B, \sum_{k=1}^{m_1} y_k = 1, y_k, z_j \in \mathbb{R}_+ \right\}.$$

Allora Q è un poliedro.

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo l'insieme

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \left\{ (\mathbf{x}^T, \mathbf{y}^T, \mathbf{z}^T)^T \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^{m_1} \times \mathbb{R}_+^{m_2} \left| \begin{array}{l} \mathbf{x}^T - \mathbf{y}^T A - \mathbf{z}^T B = \mathbf{0}^T, \\ \sum_{k=1}^{m_1} y_k = 1 \end{array} \right. \right\} \\ &= \left\{ (\mathbf{x}^T, \mathbf{y}^T, \mathbf{z}^T)^T \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^{m_1} \times \mathbb{R}_+^{m_2} \left| \begin{array}{l} \mathbf{x} - A^T \mathbf{y} - B^T \mathbf{z} = \mathbf{0}, \\ \sum_{k=1}^{m_1} y_k = 1 \end{array} \right. \right\}. \end{aligned}$$

Poliedro	Rappr. implicita	Rappr. parametrica
politopo	$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, C\mathbf{x} \geq \mathbf{d}$	$\mathbf{x} = V\boldsymbol{\nu}$
cono	$A\mathbf{x} = \mathbf{0}, C\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$	$\mathbf{x} = L\boldsymbol{\lambda} + R\boldsymbol{\mu}$
cono puntato	$A\mathbf{x} = \mathbf{0}, C\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, con $\rho(B) = n$	$\mathbf{x} = R\boldsymbol{\mu}$
poliedro	$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, C\mathbf{x} \geq \mathbf{d}$	$\mathbf{x} = L\boldsymbol{\lambda} + R\boldsymbol{\mu} + V\boldsymbol{\nu}$

Tabella 3.1: Doppia rappresentazione di un poliedro.

Si osserva che \mathcal{P} è un poliedro scritto tramite la rappresentazione implicita, con l'equazione matriciale

$$\begin{pmatrix} I & -A^T & -B^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{s}^T & \mathbf{0}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix},$$

con $\mathbf{s} = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^{m_1}$ e con la disequazione matriciale

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}^T & I & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

L'insieme

$$\text{proj}_{\mathbf{x}}(\mathcal{P})$$

è la proiezione di \mathcal{P} nello spazio di \mathbf{x} ed è anch'esso un poliedro: ogni suo elemento \mathbf{x} deve essere tale che $\mathbf{x} = A^T\mathbf{y} + B^T\mathbf{z}$ con $\mathbf{y}, \mathbf{z} \geq \mathbf{0}$ e $\sum_{i=1}^{m_1} y_i = 1$. Quindi $Q = \text{proj}_{\mathbf{x}}(\mathcal{P})$ e Q è un poliedro. \square

Nella Tabella 3.1 si può vedere come dato un generico poliedro di \mathbb{R}^n possiamo fornire la rappresentazione implicita e quella parametrica, supponendo che $\lambda_i, \mu_i, \nu_i \in \mathbb{R}$, $\mu_i, \nu_i \geq 0$, $\sum_i \nu_i = 1$ e $B = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$.

Osservazioni sulle rappresentazioni di un cono poliedrale

Consideriamo ora un cono poliedrale $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ non puntato: per la rappresentazione parametrica sono necessari i raggi e le rette. Come abbiamo già visto in precedenza se nel cono vi sono rette la scelta dei raggi che servono alla rappresentazione non è unica. Si può osservare però che dopo aver individuato le rette di \mathcal{C} , l'insieme $\mathcal{L}^\perp \cap \mathcal{C}$ è un cono poliedrale puntato: la rappresentazione parametrica di quest'ultimo è unica (perché si utilizzano i raggi estremali). Quindi dopo aver individuato i raggi estremali che descrivono $\mathcal{L}^\perp \cap \mathcal{C}$, la rappresentazione parametrica di \mathcal{C} è unica. Si possono raggiungere gli stessi

risultati anche parlando dei poliedri: per operare su questi è sufficiente considerare il cono poliedrale associato tramite l'omogeneizzazione. Di questo possiamo fornire una rappresentazione parametrica unica. Infine, in modo unico si possono determinare i generatori del poliedro a partire da quelli del cono poliedrale e quindi la rappresentazione parametrica del poliedro.

Forniamo ora una relazione tra la rappresentazione implicita e quella parametrica di un cono poliedrale. Ricordiamo che un cono poliedrale può essere sempre scritto nei due modi seguenti:

$$\mathcal{C} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}, C\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \} \quad (3.8)$$

oppure

$$\mathcal{C} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = L\boldsymbol{\lambda} + R\boldsymbol{\mu}, \text{ con } \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^h, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^k, \boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0} \} \quad (3.9)$$

dove

$A \in \mathfrak{M}_{p,n}$ e $C \in \mathfrak{M}_{q,n}$ sono le matrici che contengono rispettivamente i coefficienti del sistema di equazioni e disequazioni;

$L \in \mathfrak{M}_{n,h}$ e $R \in \mathfrak{M}_{n,k}$ sono le matrici composte rispettivamente dalle rette e dai raggi che generano il cono.

Per mettere in relazione le due rappresentazioni precedenti del cono \mathcal{C} espresse nella (3.8) e nella (3.9) possiamo ricavare il vettore \mathbf{x} dalla seconda e sostituirla nella prima. In questo modo si ottiene:

$$A(L\boldsymbol{\lambda} + R\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad C(L\boldsymbol{\lambda} + R\boldsymbol{\mu}) \geq \mathbf{0}$$

e quindi

$$\forall \boldsymbol{\lambda}, \forall \boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0} : \begin{cases} A(L\boldsymbol{\lambda}) + A(R\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{0} \\ C(L\boldsymbol{\lambda}) + C(R\boldsymbol{\mu}) \geq \mathbf{0} \end{cases} \quad (3.10)$$

Dal momento che queste relazioni devono valere per ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, allora devono essere soddisfatte anche dai raggi di R e dalle loro combinazioni positive, dalle rette di L e dalle loro combinazioni lineari: le condizioni (3.10) si possono riscrivere come

$$\forall \boldsymbol{\lambda}, \forall \boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0} : \begin{cases} A(L\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0} & A(R\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{0} \\ C(L\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0} & C(R\boldsymbol{\mu}) \geq \mathbf{0} \end{cases} \quad (3.11)$$

3.2.4 Scomposizione

Oltre a poter scrivere un poliedro \mathcal{P} tramite le rappresentazioni precedentemente introdotte, possiamo fornirne una scomposizione nella quale si possono individuare un politopo e un cono poliedrale.

Definizione 3.61 (Cono caratteristico) Sia $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro non vuoto. Si definisce cono caratteristico di \mathcal{P} il cono definito dall'insieme

$$\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathcal{P}, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{P} \}$$

Questo insieme viene indicato con $\text{char.cone}(\mathcal{P})$.

Osservazione 3.62 Se il poliedro non vuoto $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ è definito come

$$\mathcal{P} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \},$$

allora

$$\text{char.cone}(\mathcal{P}) = \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{y} \geq \mathbf{0} \}.$$

DIMOSTRAZIONE: Sia \mathbf{x} un punto di $\mathcal{P} \neq \emptyset$: allora per definizione \mathbf{y} appartiene a $\text{char.cone}(\mathcal{P})$ solo se $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathcal{P}$. Si ha che $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathcal{P}$ con $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$ se e solo se

$$A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} \geq \mathbf{b};$$

Allora, $\mathbf{y} \in \text{char.cone}(\mathcal{P})$ se e solo $A\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$. □

Osservazione 3.63 Se $\mathcal{P} \neq \emptyset$ è un poliedro di \mathbb{R}^n , allora $\text{char.cone}(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{P}$ se e solo se $\mathbf{0} \in \mathcal{P}$.

Esempio 3.64 Consideriamo il politopo $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^2$ della Figura 3.8. Si osserva che il char.cone si riduce all'origine, cioè $\text{char.cone}(\mathcal{P}) = \{\mathbf{0}\}$. Infatti, per ogni $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ diverso dal vettore nullo e per ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$, $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ non appartiene al politopo.

Se invece consideriamo il poliedro della Figura 3.9, si osserva che il suo cono caratteristico coincide con il poliedro stesso, cioè $\text{char.cone}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$: questo perché traslando ogni punto del poliedro di un vettore $\mathbf{y} \in \mathcal{P}$, questo nuovo punto appartiene ancora al poliedro.

Esempio 3.65 Esaminiamo ora la striscia tronca della Figura 3.10. L'insieme dei generatori di questo poliedro $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^2$ è formato da due vertici e da un raggio. Si può osservare che in questo caso oltre al vettore nullo anche il raggio che descrive la striscia tronca appartiene al $\text{char.cone}(\mathcal{P})$.

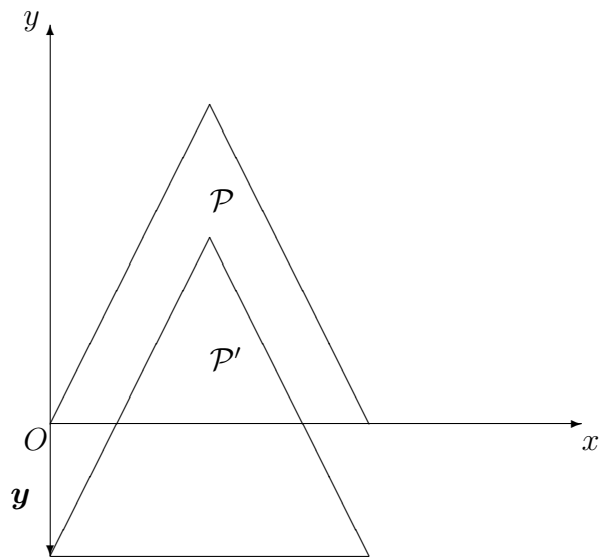


Figura 3.8: Il cono caratteristico di un politopo \mathcal{P} consiste nell'origine.

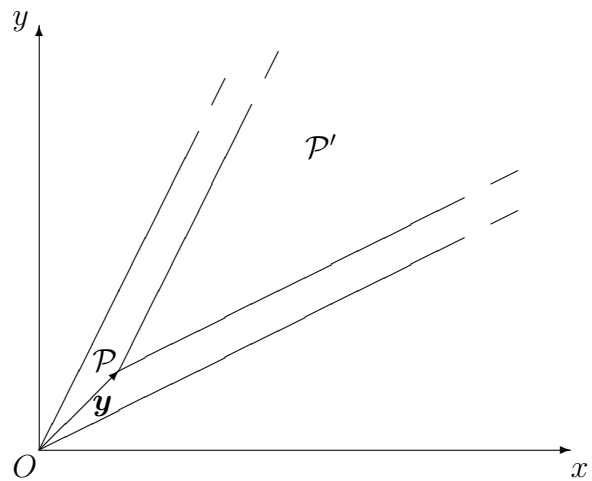


Figura 3.9: Il cono caratteristico di un cono è il cono stesso.

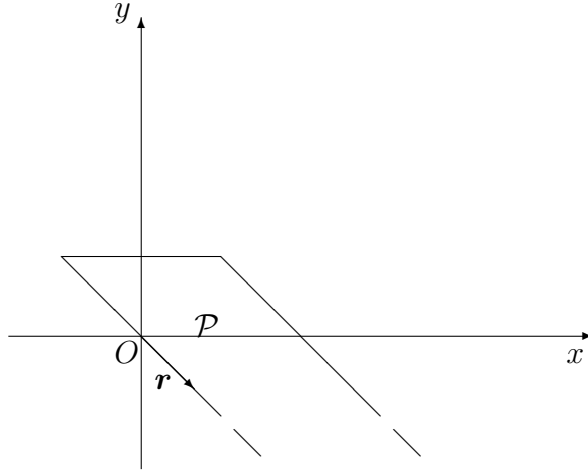


Figura 3.10: Il cono caratteristico della striscia tronca è formato dai multipli positivi del vettore \mathbf{r} e dal vettore nullo.

Definizione 3.66 (Lineality space) Sia $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro non vuoto. Il lineality space di \mathcal{P} si indica e si definisce come:

$$\text{lin.space}(\mathcal{P}) = (\text{char.cone}(\mathcal{P})) \cap (-\text{char.cone}(\mathcal{P}))^6.$$

La dimensione del lineality space coincide con il massimo numero di rette linearmente indipendenti che lo generano.

Osservazione 3.67 Se il poliedro non vuoto $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ è definito come

$$\mathcal{P} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \},$$

allora

$$\text{lin.space}(\mathcal{P}) = \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{y} = \mathbf{0} \}.$$

DIMOSTRAZIONE: Essendo

$$\text{lin.space}(\mathcal{P}) = (\text{char.cone}(\mathcal{P})) \cap (-\text{char.cone}(\mathcal{P})),$$

il lineality space di \mathcal{P} si può scrivere come:

$$\begin{aligned} \text{lin.space}(\mathcal{P}) &= \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{y} \geq \mathbf{0} \} \cap \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{y} \leq \mathbf{0} \} \\ &= \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{y} = \mathbf{0} \}. \end{aligned}$$

□

⁶La notazione ‘ $-\text{char.cone}$ ’ indica l’insieme $\{ -\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \in \text{char.cone}(\mathcal{P}) \}$.

Osservazione 3.68 *Il lin.space(\mathcal{P}) è formato solo dal vettore nullo se e solo se il poliedro \mathcal{P} ha vertici.*

Teorema 3.69 (Teorema di Motzkin) *Ogni poliedro \mathcal{P} si scompone nel modo seguente:*

$$\mathcal{P} = \mathcal{V} + \mathcal{C}$$

dove \mathcal{V} è un politopo contenuto in \mathcal{P} e $\mathcal{C} = \text{char.cone}(\mathcal{P})$ è il cono caratteristico di \mathcal{P} .

DIMOSTRAZIONE: Dimostriamo questo teorema utilizzando i Teoremi 3.56 e 3.57. Per quello che abbiamo già dimostrato, un generico poliedro $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ definito tramite la rappresentazione implicita, può anche essere scritto come

$$\mathcal{P} = \mathcal{L} + \mathcal{R} + \mathcal{V},$$

dove \mathcal{L} è l'insieme delle combinazioni lineari delle rette di \mathcal{P} , \mathcal{R} è l'insieme delle combinazioni positive dei raggi di \mathcal{P} che sono estremali se $\mathcal{L} = \{\mathbf{0}\}$, oppure sono i vettori ortogonali a quelli di \mathcal{L} e \mathcal{V} è l'insieme delle combinazioni convesse di un numero finito di punti di \mathcal{P} . Inoltre, dato un cono poliedrale $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$, questo si può scrivere come

$$\mathcal{C} = \mathcal{L} + \mathcal{R}.$$

Si può anche osservare che $\mathcal{L} + \mathcal{R}$ coincide con il cono caratteristico di \mathcal{P} : $\mathcal{C} = \text{char.cone}(\mathcal{P}) = \mathcal{L} + \mathcal{R}$. Quindi il poliedro \mathcal{P} si può scrivere come

$$\mathcal{P} = \mathcal{V} + \mathcal{C}.$$

□

Definizione 3.70 (Ray space) *Sia $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro non vuoto scritto nella forma*

$$\mathcal{P} = \mathcal{L} + \mathcal{R} + \mathcal{V}.$$

Allora $\mathcal{R} + \mathcal{V}$ si dice ray space del poliedro e lo indichiamo $\text{ray space}(\mathcal{P})$.

Nella Tabella 3.2 si può vedere come si possono scomporre i vari tipi di poliedri.

Scomposizione	Descrizione
$\mathcal{V} + \mathcal{R} + \mathcal{L}$	$\mathcal{P} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} \mathbf{x} = L\boldsymbol{\lambda} + R\boldsymbol{\mu} + V\boldsymbol{\nu}, \\ \lambda_i, \mu_i, \nu_i \in \mathbb{R}, \mu_i, \nu_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \nu_i = 1 \end{array} \right\}$
\mathcal{V}	politopo = $\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} \mathbf{x} = V\boldsymbol{\nu}, \\ \text{con } \nu_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \nu_i = 1 \end{array} \right\}$
\mathcal{R}	cono puntato = $\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = R\boldsymbol{\mu}, \text{ con } \mu_i \geq 0 \right\}$
\mathcal{L}	lineality space = $\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = L\boldsymbol{\lambda}, \text{ con } \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$
$\mathcal{V} + \mathcal{R}$	ray space
$\mathcal{R} + \mathcal{L}$	char.cone(\mathcal{P}), un cono non puntato

Tabella 3.2: Tabella delle scomposizioni.

3.2.5 Facce di un poliedro

In un poliedro, oltre ai generatori e ai vincoli che lo descrivono si possono anche individuare le *facce*.

Definizione 3.71 (Facce e facce proprie di un poliedro) *Per ogni*

$$S = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \geq b \},$$

che contiene il poliedro $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ consideriamo

$$H = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = b \}.$$

L'intersezione

$$F = \mathcal{P} \cap H$$

è detta faccia di \mathcal{P} . Inoltre, diciamo che la disequazione $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \geq b$ genera la faccia F .

Una faccia F è detta propria se $F \neq \emptyset$ e $F \neq \mathcal{P}$.

Esempio 3.72 *Consideriamo il poliedro descritto in Figura 3.11. Questo poliedro è descritto da un unico semispazio*

$$S = \{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y \geq 0 \}.$$

Intersecando l'iperpiano H determinato dal semispazio S

$$H = \{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = 0 \}$$

con il poliedro \mathcal{P} otteniamo l'intero iperpiano. Quindi l'unica faccia propria di questo poliedro coincide con l'intero iperpiano.

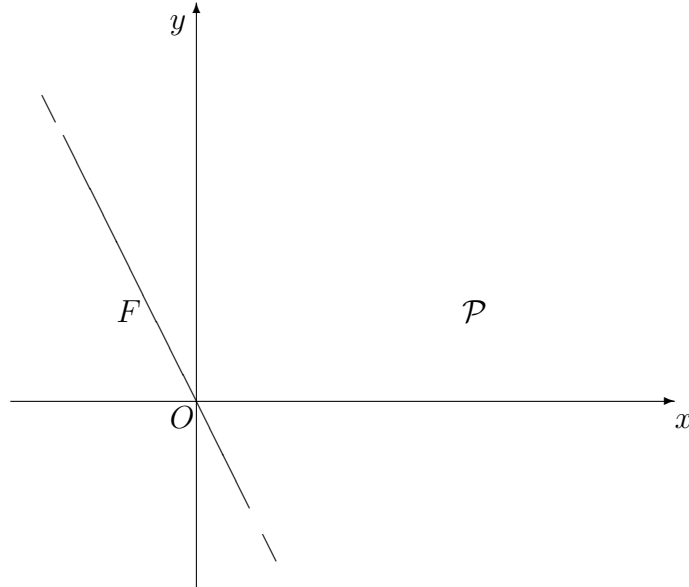


Figura 3.11: Faccia F del semispazio \mathcal{P} .

Esempio 3.73 *Se consideriamo la Figura 3.4 si può osservare che il poliedro in considerazione è un cono puntato nell'origine.*

$$\mathcal{P} = \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Questo poliedro è determinato da due semispazi:

$$S_1 = \{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y \leq 0 \},$$

$$S_2 = \{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y \geq 0 \}.$$

Quindi i rispettivi iperpiani sono:

$$H_1 = \{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 0 \},$$

$$H_2 = \{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0 \}.$$

La faccia F_1 è determinata dall'intersezione del poliedro con H_1 ed è la semiretta che parte dall'origine e di direzione $(2, 1)^T$; mentre la faccia F_2 è la semiretta che parte dall'origine di direzione $(1, 2)^T$:

$$F_1 = \{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 0, x \geq 0 \},$$

$$F_2 = \{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0, x \geq 0 \}.$$

Inoltre, se consideriamo un generico semispazio che contiene tutto il poliedro e che passa per l'origine, ad esempio quello generato dal vincolo $x + y \leq 0$, l'intersezione di

$$H_3 = \{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0 \}$$

con il poliedro ci fornisce una terza faccia F_3 che coincide con il vertice $(0, 0)^T$.

Osservazione 3.74 Ogni faccia di un poliedro \mathcal{P} è anch'essa un poliedro.

Infatti, la generica faccia determinata dal vincolo i -esimo può essere descritta tramite l'intersezione dei semispazi che determinano il poliedro e dell'iperpiano descritto dall'equazione che deriva dal vincolo i -esimo.

Osservazione 3.75 Sia $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ un cono poliedrale e $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme di cardinalità finita tale che $\mathcal{C} = \text{cone}(Q)$. Se H è un iperpiano di \mathbb{R}^n tale che $F = \mathcal{C} \cap H$ è una faccia propria di \mathcal{C} , allora $F = \text{cone}(Q')$, dove $Q' = Q \cap H$.

DIMOSTRAZIONE: Sia $\mathbf{x} \in \text{cone}(Q')$ con $Q' = Q \cap H$. Allora

$$\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{r}_i \in Q \cap H} \mu_i \mathbf{r}_i,$$

con $\mu_i \in \mathbb{R}_+$. Quindi $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, perché \mathbf{x} si può scrivere come combinazione positiva di un numero finito di elementi di Q e $\mathbf{x} \in H$, perché gli elementi che lo descrivono devono appartenere ad H : ciò dimostra che $\mathbf{x} \in F$.

Viceversa, supponiamo che $\mathbf{x} \in F = \mathcal{C} \cap H$. Questo ci permette di dire che \mathbf{x} deve soddisfare l'equazione $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = 0$ che descrive l'iperpiano H e che si può scrivere come

$$\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{r}_i \in Q} \mu_i \mathbf{r}_i,$$

con $\mu_i \in \mathbb{R}_+$. Si ha perciò che ogni $\mathbf{r}_i \in Q$ che compare attivamente nella sommatoria che descrive \mathbf{x} (cioè il corrispondente μ_i non è nullo), deve appartenere ad H e quindi appartiene a $Q \cap H$ che è uguale a Q' . In questo modo abbiamo dimostrato che $\mathbf{x} \in \text{cone}(Q')$. \square

Si può osservare che se sappiamo che $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ contiene rette e se F è una faccia propria di \mathcal{C} allora il sistema di generatori di F è formato da tutte le rette di \mathcal{C} e dai raggi di \mathcal{C} che sono raggi anche per F .

Definizione 3.76 (k -facce) Dato un poliedro $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ di dimensione h , si definisce k -faccia una faccia che è un poliedro di dimensione k , con $k \leq h$. Una $(h - 1)$ -faccia è detta faccetta e una 1-faccia è detta spigolo.

Proposizione 3.77 Sia

$$\mathcal{C} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$$

un cono poliedrale puntato e sia \mathbf{r} un suo raggio. Consideriamo l'insieme $H = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A'\mathbf{x} = \mathbf{0} \}$, dove A' è la sottomatrice di A che contiene tutte le righe per cui $\langle \mathbf{a}, \mathbf{r} \rangle = 0$ ed è tale che $\rho(A') = n - k$. Inoltre, sia $F = \mathcal{C} \cap H$ una faccia propria di \mathcal{C} . Allora si ha che

- $\rho(A'') = n - k + 1$, con A'' una sottomatrice di A tale che $A'' = \begin{pmatrix} A' \\ \mathbf{a}_i \end{pmatrix}$ e \mathbf{a}_i una qualsiasi riga di A non contenuta in A' ;
- F ha dimensione k ;
- se $k \geq 2$, allora \mathbf{r} è una combinazione positiva di due raggi distinti \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 tali che il rango delle rispettive matrici formate dalle righe di A per cui $\langle \mathbf{a}, \mathbf{r}_i \rangle = 0$ è maggiore di $n - k$.

DIMOSTRAZIONE:

- Se \mathbf{a}_i fosse una combinazione lineare di alcune righe della matrice A' , allora $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{r} \rangle = 0$. Questo è impossibile, perché A' contiene tutte le righe \mathbf{a}_j di A tali che $\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{r} \rangle = 0$ (cioè $A'\mathbf{r} = \mathbf{0}$) e \mathbf{a}_i non è una riga di A' . Quindi il rango di A'' è uguale a $n - k + 1$.
- Si osserva che H ha dimensione k , perché contiene $\mathbf{0}$ e altri k vettori linearmente indipendenti (e cioè $k + 1$ affinementemente indipendenti): $\mathbf{r}, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ sono questi vettori linearmente indipendenti. Consideriamo $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}, \mathbf{r}_i = \mathbf{r} + \alpha_i \mathbf{v}_i$ con $i = 2, \dots, k$. Questi vettori sono linearmente indipendenti se $\alpha_i \neq 0$ per ogni $i = 2, \dots, k$. Se i coefficienti α_i sono scelti in modo tale che $\alpha_i > 0$ e $\alpha_i \leq \min_{j: \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{v}_i \rangle < 0} \left\{ \frac{\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{r} \rangle}{\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{v}_i \rangle} \right\}$, per ogni $\mathbf{v}_i \notin \mathcal{C}$, i vettori \mathbf{r}_i , con $i = 1, \dots, k$, sono k vettori linearmente indipendenti di F . Inoltre, F contiene il vettore nullo e quindi $\dim(F) = k$.
- Sia $k \geq 2$. Allora H contiene un vettore \mathbf{v} tale che \mathbf{v} e $-\mathbf{v}$ non appartengono a \mathcal{C} . Poiché $\rho(A') \leq \rho(A) - 2$, esistono due righe di A , \mathbf{a}_i e \mathbf{a}_j , tali che $\rho \left(\begin{pmatrix} A' \\ \mathbf{a}_i \\ \mathbf{a}_j \end{pmatrix} \right) = \rho(A') + 2$ e quindi esistono \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 in H tali che $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{v}_1 \rangle = 0, \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{v}_1 \rangle > 0$ e $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{v}_2 \rangle < 0, \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{v}_2 \rangle = 0$. Allora $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ è tale che $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{v} \rangle < 0$ e $\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{v} \rangle > 0$. Siano $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + \alpha_1 \mathbf{v}_1$ e $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r} - \alpha_2 \mathbf{v}_2$. Allora esiste un valore positivo per gli α_i tale che $\mathbf{r}_i \in F$, con $i = 1, 2$. Quindi, $\mathbf{r} = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} (\alpha_2 \mathbf{r}_1 + \alpha_1 \mathbf{r}_2)$ è una combinazione positiva di \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 .

□

Si osserva che ogni k -faccia di un cono poliedrale è tale che la matrice A' che la genera ha rango $n - k$.

Osservazione 3.78 *Sia $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ un cono poliedrale. Una 0-faccia di \mathcal{C} è un vertice di \mathcal{C} e se \mathbf{r} è un raggio estremale di \mathcal{C} , allora $\text{cone}(\mathbf{r})$ è una 1-faccia di \mathcal{C} .*

DIMOSTRAZIONE: Sia F una 0-faccia di \mathcal{C} e dimostriamo che questa è un vertice di \mathcal{C} . Se F è una 0-faccia significa che $\dim(F) = 0$ e che quindi deve essere un punto \mathbf{p} di \mathcal{C} . Supponiamo per assurdo che \mathbf{p} non sia un vertice e che si possa perciò scrivere come combinazione convessa di altri due punti di \mathcal{C} distinti da lui:

$$\mathbf{p} = \lambda_1 \mathbf{p}_1 + \lambda_2 \mathbf{p}_2,$$

con $\lambda_i > 0$ con $i = 1, 2$ e $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. In questo modo anche \mathbf{p}_1 e \mathbf{p}_2 devono appartenere a F , ma questo è assurdo perché F ha dimensione 0 e \mathbf{p}_1 e \mathbf{p}_2 sono distinti da \mathbf{p} .

Ora dimostriamo che se vi è un vertice, questo è una 0-faccia di \mathcal{P} : per far questo dimostriamo la contronominale di questa implicazione e cioè che se il poliedro non ha 0-facce, allora \mathcal{C} non ha vertici. Infatti, se \mathcal{C} non ha 0-facce, allora \mathcal{C} è vuoto (e quindi non ha vertici) oppure il suo lineality space è diverso da $\{\mathbf{0}\}$ e quindi il poliedro \mathcal{C} avendo rette non ha vertici.

Sia \mathbf{r} un raggio estremale di \mathcal{C} . Allora $F = \text{cone}(\mathbf{r})$ ha dimensione 1. Inoltre, se A' è la sottomatrice di A formata da tutte le sue righe \mathbf{a}_i tali che $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{r} \rangle = 0$, allora F si può scrivere come $\mathcal{C} \cap H$, dove $H = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A' \mathbf{x} = \mathbf{0} \}$. Supponiamo per assurdo che la matrice A' abbia rango $n - k$ con $k \geq 2$ e quindi $\dim(H) = k$. Questo implica che anche F ha dimensione k , per come è stata costruita e questo è assurdo perché $\dim(F) = 1$. □

La relazione di inclusione “ \subseteq ” delle facce è riflessiva, antisimmetrica e transitiva e quindi determina una relazione d’ordine: l’insieme \mathcal{F} di tutte le facce del poliedro è un reticolo, con \emptyset e \mathcal{P} rispettivamente estremo inferiore e superiore dell’insieme.

Esempio 3.79 *Riprendiamo l’Esempio 3.73 e consideriamo le sue facce. Se consideriamo singolarmente le facce F_1 e F_2 , esse possono essere viste come poliedri con una faccia che in entrambi i casi coincide con l’origine e cioè con F_3 . Quindi, questo poliedro ha due facce o faccette che sono F_1 e F_2 e una 0-faccia o vertice che coincide con l’origine $O = (0, 0)^T$ ed è F_3 .*

Il reticolo formato dalle facce di \mathcal{P} è rappresentato in Figura 3.12.

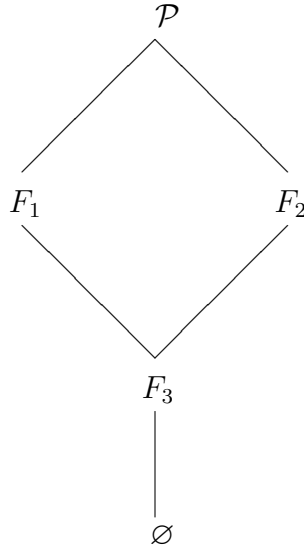


Figura 3.12: Reticolo formato dalle facce del poliedro dell'Esempio 3.79.

Definizione 3.80 (Faccia minimale propria) Sia $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro non vuoto e \mathbf{p} un punto di \mathcal{P} . Se l'insieme

$$F = \{\mathbf{p}\} + \text{lin.space}(\mathcal{P})$$

è una faccia propria di \mathcal{P} , allora F è detta faccia minimale propria di \mathcal{P} .

Si può osservare che in un cono poliedrale \mathcal{C} la faccia minimale propria coincide proprio con il lineality space. Infatti, ogni cono poliedrale non puntato è tale che $\text{lin.space}(\mathcal{C}) \neq \{\mathbf{0}\}$ e quindi coincide con la faccia minimale propria, perché si può scegliere il punto $\mathbf{p} = \mathbf{0} \in \mathcal{P}$ cosicchè l'insieme $F = \{\mathbf{p}\} + \text{lin.space}(\mathcal{P})$ sia una faccia propria di \mathcal{C} e si ha che $F = \text{lin.space}(\mathcal{C})$. Se, invece, \mathcal{C} è un cono poliedrale puntato, $\text{lin.space}(\mathcal{C}) = \{\mathbf{0}\}$ e anche in questo caso bisogna scegliere $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ per ottenere che F sia una faccia propria: si ha perciò che la faccia minimale propria F è $\{\mathbf{0}\} = \text{lin.space}(\mathcal{C})$.

Poliedri equivalenti e duale di un politopo

A partire dal concetto di faccia possiamo introdurre i concetti di poliedri equivalenti e di politopi duali.

Definizione 3.81 (Poliedri equivalenti) Siano $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{P}' \subseteq \mathbb{R}^m$ due poliedri non necessariamente definiti nello stesso spazio. Si dice che \mathcal{P} e \mathcal{P}' sono equivalenti dal punto di vista combinatorio (o isomorfi) se esiste una biezione Φ tra l'insieme \mathcal{F} delle facce di \mathcal{P} e l'insieme \mathcal{F}' delle facce di \mathcal{P}' che preserva l'inclusione. In altre parole, se $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, e

$$\Phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$$

allora

$$F_1 \subseteq F_2 \Leftrightarrow \Phi(F_1) \subseteq \Phi(F_2).$$

Esempio 3.82 Consideriamo, ad esempio, come primo poliedro $\mathcal{P}_1 \in \mathbb{R}^2$ un cono (generato da due semispazi incidenti) e come secondo $\mathcal{P}_2 \in \mathbb{R}^3$ un diedro (individuato da due semispazi che si intersecano in una retta). Facilmente si vede che i due coni sono equivalenti. Infatti, l'insieme \mathcal{F}_1 delle facce del poliedro \mathcal{P}_1 è formato da una 0-faccia (che coincide con il vertice del cono) e da due 1-facce (che corrispondono ai due raggi estremali che generano il cono); l'insieme delle facce \mathcal{F}_2 del secondo poliedro, invece, è formato dalla retta individuata dall'intersezione dei due semispazi e dall'intersezione dei due piani (generati dai semispazi che individuano il diedro) con il poliedro stesso. La biezione che conserva l'inclusione manda il vertice di \mathcal{P}_1 nella retta di \mathcal{P}_2 e i due raggi estremali nelle altre due facce del secondo poliedro.

Definizione 3.83 (Politopi duali) Siano \mathcal{P} e \mathcal{P}' due politopi definiti entrambi in \mathbb{R}^n . Si dice che \mathcal{P} e \mathcal{P}' sono duali uno dell'altro, se esiste una funzione biettiva Ψ tra l'insieme \mathcal{F} delle facce di \mathcal{P} e l'insieme \mathcal{F}' delle facce di \mathcal{P}' che rovescia l'inclusione. In altre parole, se $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, e

$$\Psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$$

allora

$$F_1 \subseteq F_2 \Leftrightarrow \Psi(F_2) \subseteq \Psi(F_1).$$

Esempio 3.84 Consideriamo, ora, i cinque solidi platonici:

tetraedro regolare è formato da quattro vertici, sei spigoli e quattro facce triangolari;

cubo è formato da otto vertici, dodici spigoli e sei facce quadrate;

ottaedro regolare è formato da sei vertici, dodici spigoli e otto facce triangolari;

dodecaedro regolare è formato da venti vertici, trenta spigoli e dodici facce pentagonali;

icosaedro regolare è formato da dodici vertici, trenta spigoli e venti facce triangolari.

Si può vedere che questi politopi sono a due a due duali. Il tetraedro è duale di se stesso: questo è possibile perché il numero dei vertici è uguale al numero delle facce. Mostriamo come possiamo definire la biezione che preserva

l'inclusione: indichiamo con V il vertice superiore e con A, B e C i vertici della base del primo tetraedro e con V', A', B' e C' i rispettivi vertici del secondo. Chiamiamo Ψ la biezione: la possiamo definire nel modo seguente:

$$\begin{array}{ll}
 \text{per i vertici:} & \Psi : V \mapsto A'B'C' \\
 & \Psi : A \mapsto A'B'V' \\
 & \Psi : B \mapsto B'C'V' \\
 & \Psi : C \mapsto C'A'V' \\
 \text{per gli spigoli:} & \Psi : AV \mapsto A'V' \\
 & \Psi : BV \mapsto B'V' \\
 & \Psi : CV \mapsto C'V' \\
 & \Psi : AB \mapsto A'B' \\
 & \Psi : BC \mapsto B'C' \\
 & \Psi : CA \mapsto C'A' \\
 \text{per le facce:} & \Psi : ABC \mapsto V' \\
 & \Psi : ABV \mapsto A' \\
 & \Psi : BCV \mapsto B' \\
 & \Psi : CAV \mapsto C'
 \end{array}$$

Allo stesso modo si può verificare che il cubo è duale dell'ottaedro e il dodecaedro dell'icosaedro.

3.2.6 Polare di un poliedro

Presentiamo ora il concetto di *polare* di un poliedro: dapprima introdurremo la definizione ed alcune osservazioni per i coni poliedrali, poi per i politopi ed infine per i poliedri in generale.

Definizione 3.85 (Polare di un cono poliedrale) *Sia $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ un cono poliedrale. L'insieme*

$$\mathcal{C}^* = \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C} : \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \geq 0 \} \quad (3.12)$$

è detto polare del cono \mathcal{C} .

Alcuni testi, come [SW70] e [NW88], riportano come definizione di polare di un cono la seguente:

$$\hat{\mathcal{C}}^* = \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C} : \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \leq 0 \}.$$

In ogni caso, ai fini degli usi che ne faremo, queste due definizioni possono essere considerate equivalenti: in particolare, esiste un'applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ che è un'isometria⁷ tale che $\phi(\hat{\mathcal{C}}^*) = \mathcal{C}^*$.

Per calcolare il polare di un cono poliedrale a partire da una rappresentazione parametrica, si può considerare il seguente risultato.

Osservazione 3.86 *Dato un cono poliedrale $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$, il suo polare \mathcal{C}^* può essere scritto come intersezione di insiemi nel seguente modo:*

$$\mathcal{C}^* = \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C} : \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \geq 0 \} = \bigcap_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}} \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \geq 0 \}. \quad (3.13)$$

Teorema 3.87 *Dato il cono $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ definito come*

$$\mathcal{C} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}, C\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$$

allora il cono

$$\mathcal{C}' = \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{y} = A^T \boldsymbol{\alpha} + C^T \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma} \geq \mathbf{0} \}$$

è il polare di \mathcal{C} .

DIMOSTRAZIONE: Sia \mathcal{C}^* il polare del cono \mathcal{C} . Per dimostrare questo teorema è necessario dimostrare le due inclusioni, $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}^*$ e $\mathcal{C}^* \subseteq \mathcal{C}'$.

Sia quindi $\mathbf{y} \in \mathcal{C}'$. Dobbiamo dimostrare che per ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ il prodotto scalare di \mathbf{y} e \mathbf{x} è non negativo.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle &= (A^T \boldsymbol{\alpha} + C^T \boldsymbol{\gamma})^T \mathbf{x} = \\ &= (\boldsymbol{\alpha}^T A + \boldsymbol{\gamma}^T C) \mathbf{x} = \\ &= \boldsymbol{\alpha}^T A \mathbf{x} + \boldsymbol{\gamma}^T C \mathbf{x} = \\ &= \boldsymbol{\gamma}^T C \mathbf{x} \geq 0, \end{aligned}$$

perché $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ e $\boldsymbol{\gamma} \geq \mathbf{0}$ e dove si è utilizzato il fatto che $(A^T B)^T = B^T A$ (con A e B matrici delle dimensioni corrette). Si ha perciò la tesi e cioè $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^*$.

Ora supponiamo di considerare un punto $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^*$ e dimostriamo che questo appartiene anche al cono \mathcal{C}' .

Osserviamo che

$$\mathbf{y} \in \mathcal{C}^* \implies \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C} : \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \geq 0;$$

⁷Si dice che $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un'isometria se è una funzione biettiva che preserva la distanza tra i punti di \mathbb{R}^n .

dunque l'insieme

$$S = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \geq 0 \}$$

è uno dei semispazi che definisce il cono \mathcal{C} . Questo significa che \mathbf{y} può essere visto come combinazione positiva delle righe della matrice C per il Lemma di Farkas (Teorema 3.53).

Abbiamo quindi scritto \mathbf{y} nella forma in cui si scrivono gli elementi di \mathcal{C}' : perciò $\mathbf{y} \in \mathcal{C}'$. \square

Teorema 3.88 *Sia $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ un cono tale che $\mathcal{C} = \text{cone}\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_t\}$. Il suo polare \mathcal{C}^* si può scrivere come:*

$$\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \dots, t\} : \langle \mathbf{z}, \mathbf{y}_i \rangle \geq 0 \}. \quad (3.14)$$

DIMOSTRAZIONE: Sia $\mathbf{x} \in \mathcal{C}^*$ e dimostriamo che \mathbf{x} appartiene all'insieme definito nella (3.14). Poiché \mathbf{x} è un punto del cono polare, è tale che

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$$

per ogni $\mathbf{y} \in \mathcal{C}$ e quindi vale in particolare per $\mathbf{y} = \mathbf{y}_i$ dove i vettori \mathbf{y}_i sono tali che $\text{cone}\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_t\} = \mathcal{C}$.

Viceversa, supponiamo che \mathbf{x} appartenga all'insieme definito nella (3.14) con gli \mathbf{y}_i tali che $\mathcal{C} = \text{cone}\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_t\}$.

Sia $\mathbf{y} \in \mathcal{C}$, allora $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^t \lambda_i \mathbf{y}_i$ e quindi

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^t \lambda_i \mathbf{y}_i, \mathbf{x} \right\rangle = \sum_{i=1}^t \lambda_i \langle \mathbf{y}_i, \mathbf{x} \rangle,$$

con $\lambda_i \geq 0$, per ogni $i = 1, \dots, t$. Poiché ogni addendo della sommatoria è non negativo ($\lambda_i \geq 0$, e $\langle \mathbf{y}_i, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ per ogni $i = 1, \dots, t$), abbiamo dimostrato che

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$$

e quindi $\mathbf{x} \in \mathcal{C}^*$. \square

Esempio 3.89 *Consideriamo il cono $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^2$ rappresentato in Figura 3.4 e calcoliamo il suo polare. Per ottenerlo, dobbiamo calcolare per ogni punto del cono il semispazio ortogonale che lo contiene: il cono polare è ottenuto dall'intersezione di questi semispazi (per la (3.13)). Il cono così ottenuto è rappresentato in Figura 3.13.*

In realtà, per il Teorema 3.88 è sufficiente calcolare i semispazi ortogonali ai raggi che generano il cono \mathcal{C} . Essendo \mathcal{C} generato dai raggi \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 il suo polare è generato dai raggi \mathbf{r}'_1 e \mathbf{r}'_2 , ortogonali a \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 .

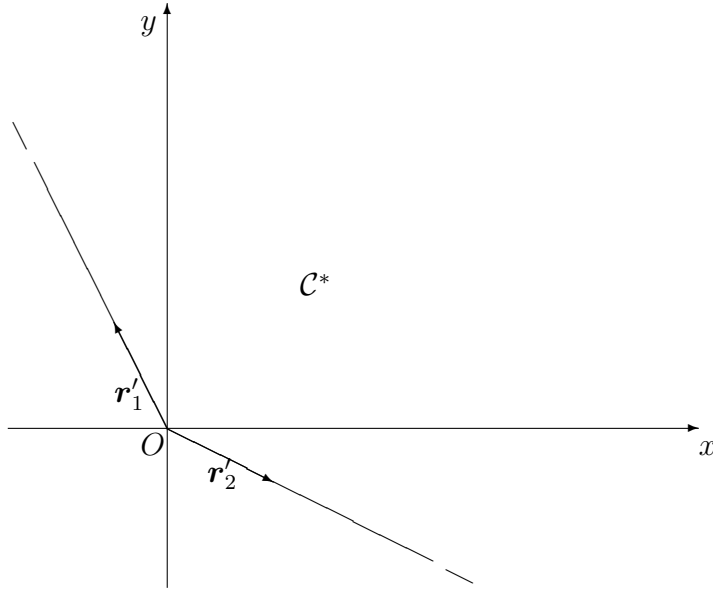


Figura 3.13: Polare del cono puntato della Figura 3.4.

Dalla Definizione 3.85 di polare di un cono poliedrale è possibile introdurre quella per descrivere il polare di un politopo.

Definizione 3.90 (Polare di un politopo) Sia $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ un politopo. L'insieme

$$\mathcal{P}^* = \{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \mid \forall \mathbf{x} \in \mathcal{P} : \langle \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle \geq -1, \} \quad (3.15)$$

si definisce polare del politopo \mathcal{P} .

Si osserva che la definizione di polare di un politopo appena proposta deriva dalla Definizione 3.85 per un cono poliedrale. Infatti, ogni politopo $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ può essere omogeneizzato e trasformato in un cono poliedrale $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$: ogni raggio \mathbf{r} di \mathcal{C} corrispondente al vertice $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^T$ di \mathcal{P} è tale che $\mathbf{r} = (v_1, \dots, v_n, 1)^T$. Applicando la definizione di polare di un cono poliedrale, si ottiene che ogni punto $\hat{\mathbf{z}}$ di $\mathcal{C}^* \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ è tale che $\langle \hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r} \rangle \geq 0$ per ogni \mathbf{r} raggio di \mathcal{C} . Questo si può riscrivere come

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{z}}, \mathbf{r} \rangle &= \sum_{i=1}^{n+1} z_i r_i \\ &= \sum_{i=1}^n z_i r_i + z_{n+1} \geq 0. \end{aligned}$$

Applicando il procedimento contrario all'omogeneizzazione, cioè passando dal cono di \mathbb{R}^{n+1} al poliedro di \mathbb{R}^n , si ottiene che i punti del polare di un politopo devono soddisfare la condizione espressa nella Definizione 3.90.

Osservazione 3.91 Sia $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ un politopo. Il poliedro polare \mathcal{P}^* di \mathcal{P} non è detto che sia un politopo.

Anche per i politopi si può enunciare un teorema analogo al Teorema 3.88 e cioè:

Teorema 3.92 Sia $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ un politopo e $V = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t\}$ l'insieme dei suoi vertici. Il suo polare \mathcal{P}^* si può scrivere come

$$\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_i \rangle \geq -1, \forall i = 1, \dots, t \}. \quad (3.16)$$

DIMOSTRAZIONE: Dimostriamo che ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{P}^*$ appartiene anche all'insieme (3.16). Infatti, se il prodotto scalare di \mathbf{x} e di un qualsiasi punto di \mathcal{P} è maggiore o uguale ad -1 , questo vale anche per i vertici del politopo in quanto anch'essi sono punti di \mathcal{P} .

Viceversa, dimostriamo che ogni punto \mathbf{x} nell'insieme (3.16) appartiene anche a \mathcal{P}^* . Sia \mathbf{y} un generico punto di \mathcal{P} : dobbiamo verificare che il prodotto scalare di \mathbf{x} e \mathbf{y} è maggiore o uguale a -1 .

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^t \lambda_i \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_i \rangle$$

con $\lambda_i \geq 0$ per ogni $i = 1, \dots, t$ e $\sum_{i=1}^t \lambda_i = 1$. Si ha quindi che

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \geq -1 \cdot \sum_{i=1}^t \lambda_i = -1$$

e quindi la tesi. □

I teoremi 3.88 e 3.92 consentono di fornire la seguente definizione:

Definizione 3.93 (Polare di un poliedro) Sia $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro la cui scomposizione di Minkowski è $\mathcal{P} = \mathcal{V} + \mathcal{C}$. Allora il suo polare \mathcal{P}^* si può scrivere come:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^* = & \{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{z}, \mathbf{v}_i \rangle \geq -1, \forall i = 1, \dots, m \} \\ & + \{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{z}, \mathbf{y}_i \rangle \geq 0, \forall i = 1, \dots, t \}, \end{aligned}$$

dove \mathbf{v}_i per ogni $i = 1, \dots, m$ sono i vertici del politopo \mathcal{V} e \mathbf{y}_i per ogni $i = 1, \dots, t$ sono i raggi tali che $\mathcal{C} = \text{cone}\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_t\}$.

Si osserva che la definizione di polare di un poliedro deriva dalla definizione di polare di un cono poliedrale. Infatti, se chiamiamo $\hat{\mathcal{C}} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ il cono poliedrale ottenuto omogeneizzando \mathcal{P} , allora il suo polare \mathcal{C}^* si può scrivere come

$$\mathcal{C}^* = \bigcap_{\hat{\mathbf{y}}_i \in Q} \{ \hat{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle \hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{y}}_i \rangle \geq 0 \},$$

dove $\hat{\mathcal{C}} = \text{cone}(Q)$. Possiamo ora dividere l'insieme Q in due sottoinsiemi Q_1 e Q_2 : il primo contiene gli elementi di Q con $x_{n+1} = 0$ e il secondo quelli con $x_{n+1} > 0$:

$$\mathcal{C}^* = \bigcap_{\hat{\mathbf{y}}_i \in Q_1} \{ \hat{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle \hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{y}}_i \rangle \geq 0 \} \cap \bigcap_{\hat{\mathbf{y}}_i \in Q_2} \{ \hat{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle \hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{y}}_i \rangle \geq 0 \}.$$

Applicando ora il procedimento inverso all'omogeneizzazione, calcoliamo il poliedro \mathcal{P}^* a partire da \mathcal{C}^* :

$$\mathcal{P}^* = \bigcap_{\mathbf{y}_i \in Q_1} \{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{z}, \mathbf{y}_i \rangle \geq 0 \} \cap \bigcap_{\mathbf{y}_i \in Q_2} \{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{z}, \mathbf{y}_i \rangle + 1 \geq 0 \},$$

dove i vettori $\mathbf{y}_i \in Q$ sono i generatori corrispondenti a $\hat{\mathbf{y}}_i$, ottenuti invertendo il procedimento di omogeneizzazione e quindi:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^* = & \{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{z}, \mathbf{v}_i \rangle \geq -1, \forall i = 1, \dots, m \} \\ & + \{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{z}, \mathbf{y}_i \rangle \geq 0, \forall i = 1, \dots, t \}, \end{aligned}$$

con $\mathbf{y}_i \in Q_1$ e $\mathbf{v}_i \in Q_2$.

Osservazione 3.94 *Il polare $\mathcal{P}^* \subseteq \mathbb{R}^n$ del poliedro $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ non dipende dalla scelta dei punti che individuano il politopo \mathcal{V} .*

DIMOSTRAZIONE: Sia $\mathcal{P} = \mathcal{V} + \mathcal{C}$ e supponiamo che si possa anche scrivere come $\mathcal{P} = \mathcal{V}' + \mathcal{C}$. Nel primo caso, il polare \mathcal{P}^* è individuato considerando i vertici del politopo \mathcal{V} , mentre nel secondo \mathcal{V}' . Inoltre, ogni punto di \mathcal{V}' si può scrivere con opportune combinazioni dei vertici di \mathcal{V} e dei generatori di \mathcal{C} . Quindi, se $\mathbf{x} \in \mathcal{P}^*$ ed è tale che $\langle \mathbf{z}, \mathbf{y}_i \rangle \geq 0$ con \mathbf{y}_i vertici di \mathcal{V} , allora è anche tale che $\langle \mathbf{z}, \mathbf{y}'_i \rangle \geq 0$ con \mathbf{y}'_i vertici di \mathcal{V}' , e viceversa. \square

Inoltre, si può osservare che i polari soddisfano alcune proprietà:

Proprietà 3.95 *Valgono allora le seguenti proprietà:*

1. il polare del polare di un cono poliedrale coincide con il cono stesso:

$$(\mathcal{C}^*)^* = \mathcal{C}$$

con $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$;

2. siano $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ due coni poliedrali. Si ha allora

$$\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2 \iff \mathcal{C}_2^* \subseteq \mathcal{C}_1^*;$$

3. due coni poliedrali coincidono se e solo se coincidono i loro polari:

$$\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2 \iff \mathcal{C}_1^* = \mathcal{C}_2^*$$

con $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subseteq \mathbb{R}^n$.

DIMOSTRAZIONE:

1. Si può scrivere:

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}^*)^* &= \{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle \geq 0, \forall \mathbf{y} \in \mathcal{C}^* \} \\ &= \{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle \geq 0, \forall \mathbf{y} \text{ tali che } \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C} \} \\ &= \mathcal{C}. \end{aligned}$$

2. Consideriamo $\mathbf{x} \in \mathcal{C}_2^*$ e ciò significa che $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \geq 0$ per ogni $\mathbf{y} \in \mathcal{C}_2$. Ma \mathcal{C}_2 contiene \mathcal{C}_1 e quindi la relazione precedente vale anche per tutti i punti $\mathbf{y} \in \mathcal{C}_1$. Ciò significa che $\mathbf{x} \in \mathcal{C}_1^*$.

3. Poiché $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$, per il punto precedente si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2 &\iff \mathcal{C}_2^* \subseteq \mathcal{C}_1^* \\ \mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}_1 &\iff \mathcal{C}_1^* \subseteq \mathcal{C}_2^*. \end{aligned}$$

E quindi si ha l'uguaglianza dei polari.

□

Bisogna osservare che queste proprietà non sono vere se consideriamo coni generici, invece di coni poliedrali.

Capitolo 4

L'algoritmo di N. V. Chernikova

4.1 Preliminari

Introduciamo ora alcune definizioni e osservazioni necessarie alla descrizione e alla dimostrazione dell'algoritmo di N. V. Chernikova.

Definizione 4.1 (Vincoli saturati, soddisfatti o violati) Sia \mathbf{a} un vettore di \mathbb{R}^n . Si dice che il vincolo

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$$

- è saturato da un vettore $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se $\langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle = 0$;
- è soddisfatto (o verificato) da un vettore $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se $\langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle \geq 0$;
- è violato da un vettore $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se $\langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle < 0$.

Definizione 4.2 (Insieme dei vincoli saturati) Sia

$$\mathcal{C} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$$

un cono poliedrale e \mathbf{y} un elemento di \mathcal{C} . Indichiamo con $S(\mathbf{y}, A)$ l'insieme dei vincoli saturati dal vettore \mathbf{y} e cioè

$$S(\mathbf{y}, A) = \{ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a} \text{ è una riga della matrice } A \text{ e } \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle = 0 \}.$$

Definizione 4.3 (Insieme di generatori che saturano un vincolo) Sia $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro descritto da un sistema di generatori $\mathbf{G} = (L, R, V)$. Se c è un vincolo di \mathcal{P} con $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ come vettore dei coefficienti e con b termine

noto, allora indichiamo con $S(c, \mathbf{G})$ l'insieme di generatori che saturano il vincolo c , cioè l'insieme

$$S(c, \mathbf{G}) = \{ \mathbf{v} \in V \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle = b \} \cup \{ \mathbf{r} \in R \cup L \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{r} \rangle = 0 \}.$$

Proposizione 4.4 Se \mathbf{y}_1 e $\mathbf{y}_2 \in \mathbb{R}^n$ sono due vettori di un cono poliedrale $\mathcal{C} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$ e $\mathbf{y} \in \mathcal{C}$ è una combinazione positiva di \mathbf{y}_1 e \mathbf{y}_2 tale che $\mathbf{y} \neq \mu_i \mathbf{y}_i$ con $i = 1, 2$ e $\mu_i \in \mathbb{R}_+$, allora

$$S(\mathbf{y}, A) = S(\mathbf{y}_1, A) \cap S(\mathbf{y}_2, A).$$

DIMOSTRAZIONE: Notiamo che se \mathbf{y} è ottenibile tramite una combinazione positiva di \mathbf{y}_1 e \mathbf{y}_2 , si può scrivere:

$$\mathbf{y} = \lambda_1 \mathbf{y}_1 + \lambda_2 \mathbf{y}_2,$$

con $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$. Dal momento che \mathbf{y} è diverso da $\mu_i \mathbf{y}_i$ per ogni $i = 1, 2$ e $\mu_i \in \mathbb{R}_+$, i coefficienti λ_1 e λ_2 devono essere entrambi non nulli.

Consideriamo $\mathbf{a} \in S(\mathbf{y}, A)$:

$$0 = \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle = \lambda_1 \langle \mathbf{a}, \mathbf{y}_1 \rangle + \lambda_2 \langle \mathbf{a}, \mathbf{y}_2 \rangle.$$

Poiché $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, la precedente uguaglianza è vera solo se i due addendi della somma sono nulli e cioè

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{y}_1 \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{y}_2 \rangle = 0.$$

Perciò \mathbf{a} appartiene sia a $S(\mathbf{y}_1, A)$ sia a $S(\mathbf{y}_2, A)$ e quindi $\mathbf{a} \in S(\mathbf{y}_1, A) \cap S(\mathbf{y}_2, A)$.

Consideriamo ora $\mathbf{a} \in S(\mathbf{y}_1, A) \cap S(\mathbf{y}_2, A)$:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle = \lambda_1 \langle \mathbf{a}, \mathbf{y}_1 \rangle + \lambda_2 \langle \mathbf{a}, \mathbf{y}_2 \rangle = 0,$$

perché $\langle \mathbf{a}, \mathbf{y}_i \rangle = 0$ con $i = 1, 2$. Quindi $\mathbf{a} \in S(\mathbf{y}, A)$. □

Definizione 4.5 (Vettori ridondanti) Un vettore $\mathbf{y} \in Q$ (con $Q \subseteq \mathbb{R}^n$) è detto vettore ridondante rispetto all'insieme Q se \mathbf{y} si può scrivere come combinazione positiva di elementi di $Q \setminus \{\mathbf{y}\}$.

Osservazione 4.6 Sia $Q \subseteq \mathbb{R}^n$. Il vettore $\mathbf{y} \in Q$ è ridondante rispetto all'insieme Q se e solo se $\text{cone}(Q) = \text{cone}(Q \setminus \{\mathbf{y}\})$.

DIMOSTRAZIONE: Si osserva che $\text{cone}(Q \setminus \{\mathbf{y}\}) \subseteq \text{cone}(Q)$, perché tutti i punti che si esprimono come combinazioni positive degli elementi di $Q \setminus \{\mathbf{y}\}$, si possono anche individuare con combinazioni positive di Q .

Sia $\mathbf{y} \in Q$ un vettore ridondante, cioè si può scrivere come combinazione positiva degli altri elementi di Q

$$\mathbf{y} = \sum_{\mathbf{y}_i \in Q \setminus \{\mathbf{y}\}} \lambda_i \mathbf{y}_i,$$

con $\lambda_i \geq 0$. Ogni $\mathbf{x} \in \text{cone}(Q)$ si può scrivere come combinazione positiva degli elementi di Q

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \sum_{\mathbf{y}_i \in Q} \mu_i \mathbf{y}_i = \sum_{\mathbf{y}_i \in Q \setminus \{\mathbf{y}\}} \mu_i \mathbf{y}_i + \mu \mathbf{y} \\ &= \sum_{\mathbf{y}_i \in Q \setminus \{\mathbf{y}\}} \mu_i \mathbf{y}_i + \mu \sum_{\mathbf{y}_i \in Q \setminus \{\mathbf{y}\}} \lambda_i \mathbf{y}_i = \sum_{\mathbf{y}_i \in Q \setminus \{\mathbf{y}\}} \mu_i \mathbf{y}_i + \sum_{\mathbf{y}_i \in Q \setminus \{\mathbf{y}\}} \hat{\lambda}_i \mathbf{y}_i \\ &= \sum_{\mathbf{y}_i \in Q \setminus \{\mathbf{y}\}} (\mu_i + \hat{\lambda}_i) \mathbf{y}_i = \sum_{\mathbf{y}_i \in Q \setminus \{\mathbf{y}\}} \hat{\mu}_i \mathbf{y}_i. \end{aligned}$$

con $\mu_i, \mu \geq 0$ e quindi $\mathbf{x} \in \text{cone}(Q \setminus \{\mathbf{y}\})$. □

Definizione 4.7 (Insiemi ridondanti) *Un insieme $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ è detto insieme ridondante se contiene vettori ridondanti. Si dice insieme non ridondante in caso contrario.*

Definizione 4.8 (Facce adiacenti) *Due d -facce si dicono adiacenti se sono contenute entrambe in una stessa $(d+1)$ -faccia.*

Definizione 4.9 (Raggi adiacenti) *Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un cono poliedrale puntato definito da*

$$C = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$$

e Q un insieme dei suoi raggi estremali. Due raggi $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in Q$ sono detti adiacenti se

1. $|S(\mathbf{r}_1, A) \cap S(\mathbf{r}_2, A)| \geq 1$ e
2. non esiste nessun $\mathbf{r} \in Q$ diverso da \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 tale che

$$S(\mathbf{r}_1, A) \cap S(\mathbf{r}_2, A) \subseteq S(\mathbf{r}, A).$$

Proposizione 4.10 *Sia*

$$\mathcal{C} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$$

un cono poliedrale puntato di \mathbb{R}^n e \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 due raggi estremali distinti di \mathcal{C} . Allora \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 sono adiacenti se e solo se la sottomatrice di A formata dai vincoli di $S(\mathbf{r}_1, A) \cap S(\mathbf{r}_2, A)$ ha rango $n - 2$.

DIMOSTRAZIONE: Siano \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 due raggi estremali distinti di \mathcal{C} e $H = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A'\mathbf{x} = \mathbf{0} \}$, con A' la sottomatrice di A formata dagli elementi di $S(\mathbf{r}_1, A) \cap S(\mathbf{r}_2, A)$. Allora, $F = \mathcal{C} \cap H$ è la più piccola faccia di \mathcal{C} che contiene \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 . Poiché \mathcal{C} è puntato e $\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2$, sappiamo che $S(\mathbf{r}_1, A) \neq S(\mathbf{r}_2, A)$.

Supponiamo di sapere che la sottomatrice di A formata dagli elementi di $S(\mathbf{r}_1, A) \cap S(\mathbf{r}_2, A)$ abbia rango $n - 2$. Allora $\dim(H) = 2$ e \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 generano H : ogni elemento \mathbf{x} di H può essere scritto come $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{r}_1 + \alpha_2\mathbf{r}_2$. Inoltre, se $\mathbf{x} \in F$, allora $\alpha_i \geq 0$ con $i = 1, 2$, poiché esiste almeno un $\mathbf{a}_i \in S(\mathbf{r}_1, A) \setminus S(\mathbf{r}_2, A)$ (oppure $\mathbf{a}_i \in S(\mathbf{r}_2, A) \setminus S(\mathbf{r}_1, A)$), per cui $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ e $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle = \alpha \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{r}_1 \rangle$ (oppure $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle = \alpha \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{r}_2 \rangle$). In questo modo \mathbf{x} è una combinazione positiva di \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 e non ci sono altri raggi estremali in F .

Supponiamo ora che il rango della sottomatrice di A formata dagli elementi di $S(\mathbf{r}_1, A) \cap S(\mathbf{r}_2, A)$ sia $n - k$ con $k \geq 3$. Allora per il secondo punto della Proposizione 3.77 $\dim(F) = k$ e sono necessari almeno k raggi estremali per poterla descrivere. Allora \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 non sono adiacenti. \square

Questa proposizione permette di osservare che se \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 sono due raggi estremali di un cono poliedrale puntato, allora sono adiacenti se e solo se appartengono alla stessa 2-faccia. In questo modo, dire che due raggi estremali di un cono puntato sono adiacenti secondo la Definizione 4.9 equivale a considerarli come 1-facce del cono e a dire che sono adiacenti secondo la Definizione 4.8.

Lemma 4.11 *Consideriamo $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ il vettore non nullo che genera l'iperpiano*

$$H = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = 0 \}.$$

Siano $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbb{R}^n$ tali che $\langle \mathbf{a}, \mathbf{y}_1 \rangle \geq 0$ e $\langle \mathbf{a}, \mathbf{y}_2 \rangle \leq 0$. Allora, è sempre possibile definire un vettore $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ come combinazione positiva di \mathbf{y}_1 e \mathbf{y}_2 in modo tale che $\langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

DIMOSTRAZIONE: Sia quindi $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ottenuto come combinazione positiva dei vettori \mathbf{y}_1 e \mathbf{y}_2 :

$$\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}_1 + \mu\mathbf{y}_2,$$

con $\lambda, \mu \geq 0$. Per dimostrare il teorema si devono individuare i coefficienti della combinazione λ e μ in modo tale che \mathbf{y} appartenga all'iperpiano H .

È sufficiente scegliere come valore per $\lambda = -\langle \mathbf{a}, \mathbf{y}_2 \rangle \geq 0$ e $\mu = \langle \mathbf{a}, \mathbf{y}_1 \rangle \geq 0$. Infatti, in questo modo si ha:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{y}_1 \rangle + \mu \langle \mathbf{a}, \mathbf{y}_2 \rangle = -\langle \mathbf{a}, \mathbf{y}_2 \rangle \cdot \langle \mathbf{a}, \mathbf{y}_1 \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{y}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{a}, \mathbf{y}_2 \rangle = 0.$$

□

Definizione 4.12 (Faccia estrema propria) Sia \mathcal{C} un cono di \mathbb{R}^n e F l'insieme definito come

$$F = \text{cone}(\mathbf{y}) + \text{lin.space}(\mathcal{C}).$$

Se F è una faccia propria di \mathcal{C} , allora F è detta faccia estrema propria di \mathcal{C} . Inoltre, si dice che \mathbf{y} genera F . La dimensione di una faccia estrema propria F è uguale a $t + 1$ se $\dim(\text{lin.space}(\mathcal{C})) = t$.

In alcuni testi, come ad esempio in [Le 92], l'insieme F definito nella Definizione 4.12 viene detto faccia minimale propria. La nostra scelta di definire in modo diverso la faccia minimale propria di un poliedro (vedi Definizione 3.80) è stata indotta dall'idea che se le facce di un poliedro formano un reticolo il concetto di minimale propria deve essere correlato alla posizione di questo insieme nel reticolo.

Osservazione 4.13 Sia $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ un cono poliedrale e F una faccia estrema propria generata da $\mathbf{y} \in \mathcal{C}$. Se $\text{lin.space}(\mathcal{C}) = \{\mathbf{0}\}$, allora \mathbf{y} è un raggio estrema di \mathcal{C} .

Infatti, in questo caso la faccia estrema propria si riduce a $F = \text{cone}(\mathbf{y})$ e $\dim(F) = 1$: F è quindi una 1-faccia che coincide con il raggio estrema \mathbf{y} , perché \mathcal{C} è puntato.

Lemma 4.14 Sia $\mathcal{C} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$ un cono poliedrale di \mathbb{R}^n e $\mathbf{y} \in \mathcal{C}$. Allora $F = \text{cone}(\mathbf{y}) + \text{lin.space}(\mathcal{C})$ è una faccia estrema propria di \mathcal{C} se e solo se F si può anche scrivere come

$$F = \{ \mathbf{x} \in \mathcal{C} \mid A'\mathbf{x} = \mathbf{0}, \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle \geq 0 \}, \quad (4.1)$$

dove A' è una sottomatrice di A che contiene tutti i vincoli saturati da \mathbf{y} , \mathbf{a}_i una riga di A non presente già in A' tale che $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{y} \rangle \geq 0$ e il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} A' \\ \mathbf{a}_i \end{pmatrix}$$

è uguale a $n - t$, dove t è la dimensione del $\text{lin.space}(\mathcal{C})$.

DIMOSTRAZIONE: Sia $F = \text{cone}(\mathbf{y}) + \text{lin.space}(\mathcal{C})$ una faccia estrema propria di $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ di dimensione $t + 1$ con $t = \dim(\text{lin.space}(\mathcal{C}))$. Sia A' la sottomatrice di A composta da tutti i vincoli che appartengono a $S(\mathbf{y}, A)$ e sia \mathbf{a}_i una riga di A che non appartiene ad A' . La matrice A' ha rango $n - t - 1$, perché F ha dimensione $t + 1$; inoltre, \mathbf{a}_i è linearmente indipendente da tutte le righe di A' e quindi $\rho\left(\begin{pmatrix} A' \\ \mathbf{a}_i \end{pmatrix}\right) = n - t - 1 + 1 = n - t$.

Se $\bar{\mathbf{x}} \in F$, allora

$$\bar{\mathbf{x}} = \mu \mathbf{y} + \sum_{i \in I} \lambda_i \mathbf{l}_i$$

con $\mu \in \mathbb{R}_+$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ e $\{\mathbf{l}_i\}_{i \in I}$ l'insieme finito di rette che generano $\text{lin.space}(\mathcal{C})$. Allora si ha che $A' \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ e $\langle \mathbf{a}_i, \bar{\mathbf{x}} \rangle \geq 0$.

Viceversa, sia $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{C}$ tale che $A' \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ e $\langle \mathbf{a}_i, \bar{\mathbf{x}} \rangle \geq 0$. Allora, $\bar{\mathbf{x}}$ si può scrivere tramite i generatori di \mathcal{C} , cioè

$$\bar{\mathbf{x}} = \sum_{i \in I} \mu_i \mathbf{r}_i + \sum_{j \in J} \lambda_j \mathbf{l}_j.$$

Dal momento che $\bar{\mathbf{x}}$ satura tutti i vincoli di A' e soddisfa la disequazione $\langle \mathbf{a}_i, \bar{\mathbf{x}} \rangle \geq 0$, anche i generatori che descrivono $\bar{\mathbf{x}}$ devono soddisfare questa proprietà. Quindi

$$\bar{\mathbf{x}} = \mu \mathbf{r} + \sum_{j \in J} \lambda_j \mathbf{l}_j,$$

e cioè $\bar{\mathbf{x}} \in F$.

Supponiamo ora di avere un insieme F definito come in (4.1). Questa è una faccia estrema propria di \mathcal{C} perché è formata da quei punti di \mathcal{C} che saturano tutti i vincoli della matrice A' che ha rango $n - t - 1$, con $t = \dim(\text{lin.space}(\mathcal{C}))$ e quindi ha dimensione $t + 1$. \square

Proposizione 4.15 *Sia $\mathcal{C} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$ un cono poliedrale di \mathbb{R}^n . Due raggi \mathbf{y}_1 e \mathbf{y}_2 di \mathcal{C} generano la stessa faccia estrema propria di \mathcal{C} se e solo se $S(\mathbf{y}_1, A) = S(\mathbf{y}_2, A)$.*

DIMOSTRAZIONE: Siano F_1 e F_2 le facce estremali proprie generate da \mathbf{y}_1 e da \mathbf{y}_2 , rispettivamente:

$$F_1 = \text{cone}\{\mathbf{y}_1\} + \text{lin.space}(\mathcal{C}) \quad \text{e} \quad F_2 = \text{cone}\{\mathbf{y}_2\} + \text{lin.space}(\mathcal{C}).$$

Ogni $\mathbf{y} \in F_1$ può essere scritto come

$$\mathbf{y} = \lambda \mathbf{y}_1 + \mu_1 \mathbf{z}_1 + \dots + \mu_t \mathbf{z}_t$$

con $\mathbf{z}_j \in \text{lin.space}(\mathcal{C})$ per ogni $i = 1, \dots, t$ e $\lambda \in \mathbb{R}_+$ e per costruzione deve saturare tutti i vincoli che appartengono a $S(\mathbf{y}_1, A)$. In particolare, se $F_1 = F_2$, \mathbf{y}_2 deve saturare tutti i vincoli di $S(\mathbf{y}_1, A)$ e \mathbf{y}_1 tutti quelli di $S(\mathbf{y}_2, A)$. Quindi $S(\mathbf{y}_1, A) = S(\mathbf{y}_2, A)$.

Viceversa, supponiamo che $F_1 \neq F_2$ e che $\mathbf{y}_2 \notin F_1$, con F_1 definito come nella (4.1). Si osserva che \mathbf{y}_2 soddisfa il vincolo $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle \geq 0$, perché appartiene al cono e che quindi esiste una riga di A' che non è saturata da \mathbf{y}_2 . Ma la matrice A' è formata da tutte le righe di A saturate da \mathbf{y}_1 e quindi $S(\mathbf{y}_1, A) \neq S(\mathbf{y}_2, A)$. \square

Proposizione 4.16 *Sia*

$$\mathcal{C} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$$

un cono poliedrale non vuoto di \mathbb{R}^n e Q un insieme di raggi di \mathcal{C} tale che $\mathcal{C} = \text{cone}(Q) + \text{lin.space}(\mathcal{C})$. Allora un raggio $\mathbf{y} \in Q$ è non ridondante in Q se e solo se non esiste nessun raggio $\mathbf{y}' \in Q$ tale che $S(\mathbf{y}, A) \subset S(\mathbf{y}', A)$.

DIMOSTRAZIONE: Sia $Q' = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_r\}$ un insieme non ridondante di raggi tale che $\mathcal{C} = \text{cone}(Q') + \text{lin.space}(\mathcal{C})$ e sia

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{y}_i + \sum_{i=1}^t \mu_i \mathbf{z}_i,$$

con $\lambda_i \geq 0$ e $\mathbf{z}_i \in \text{lin.space}(\mathcal{C})$.

Poiché $\mathbf{y} \notin \text{lin.space}(\mathcal{C})$, esiste almeno un λ_i che non è uguale a zero. Se ne esiste uno, diciamo λ_l , allora la faccia estrema propria generata da \mathbf{y}_l è la stessa generata da \mathbf{y} . Quindi per la Proposizione 4.15 $S(\mathbf{y}, A) = S(\mathbf{y}_l, A)$. Supponiamo che esistano almeno due $\lambda_i \neq 0$. Allora per la Proposizione 4.4:

$$S(\mathbf{y}, A) = \bigcap_{i, \lambda_i \neq 0} S(\mathbf{y}_i, A).$$

Poiché tutte le facce estremali proprie sono differenti, gli insiemi $S(\mathbf{y}_i, A)$ sono differenti. Segue quindi che $S(\mathbf{y}, A) \subset S(\mathbf{y}_i, A)$ per tutti gli i , e \mathbf{y} è ridondante. \square

Osservazione 4.17 *Sia $\mathcal{C} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$ un cono poliedrale di \mathbb{R}^n e $Q \subseteq \mathcal{C}$ un insieme di raggi di \mathcal{C} tale che $\mathcal{C} = \text{cone}(Q) + \text{lin.space}(\mathcal{C})$. Allora un vettore \mathbf{y} è non ridondante in Q se e solo se non esiste nessun $\mathbf{y}' \in Q \setminus \{\mathbf{y}\}$ tale che $S(\mathbf{y}, A) \subseteq S(\mathbf{y}', A)$.*

4.2 Algoritmo di N. V. Chernikova

Introduciamo ora un algoritmo che permette il passaggio dalla rappresentazione implicita di un poliedro a quella parametrica e viceversa. Quindi a partire da un sistema di vincoli questo algoritmo permette di individuare un sistema di generatori non ridondanti; lo stesso ci consente di individuare a partire da un sistema di generatori un insieme di vincoli non ridondanti.

Questo algoritmo è conosciuto con il nome di *algoritmo di N. V. Chernikova* (o brevemente *algoritmo di Chernikova*), ma è stato “riscoperto” più volte e gli sono stati dati nomi differenti. Il metodo conosciuto con il nome di *metodo della doppia rappresentazione*, descritto in [MRTT53] è essenzialmente uguale. D'altra parte, anche l'algoritmo conosciuto con il nome di *eliminazione di Fourier-Motzkin* è più generale degli altri metodi, ma è spesso considerato in parte uguale al metodo della doppia rappresentazione, perché può essere utilizzato per gli stessi scopi. Questo algoritmo è però essenzialmente diverso dal metodo della doppia rappresentazione, perché non contiene l'informazione della doppia rappresentazione del poliedro convesso associato, anche quando è utilizzato per questo scopo. Inoltre, l'algoritmo di Chernikova si occupa solamente del caso in cui il poliedro \mathcal{P} sia contenuto in \mathbb{R}_+ : solamente un'estensione successiva operata da Le Verge in [Le 92] consente di operare che non sono soggetti a questa limitazione.

In realtà, l'algoritmo di Chernikova si occupa solamente di coni poliedrali in quanto come abbiamo visto nella sezione 3.2.2 ogni poliedro si può trasformare in un cono poliedrale. Ricordiamo che

1. la rappresentazione implicita di un cono poliedrale è:

$$\mathcal{C} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \},$$

dove $A \in \mathfrak{M}_{m,n}$ è la matrice dei coefficienti delle disequazioni¹;

2. la rappresentazione parametrica di un cono non puntato è:

$$\mathcal{C} = \text{cone}(Q) = \sum_{\mathbf{r}_i \in Q} \mu_i \mathbf{r}_i,$$

¹In realtà la rappresentazione implicita di un cono poliedrale è:

$$\mathcal{C} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}, C\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$$

con $A \in \mathfrak{M}_{m_1,n}$ e $C \in \mathfrak{M}_{m_2,n}$ e ogni equazione $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = 0$ si può scomporre in due disequazioni $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ e $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \leq 0$.

dove Q è l'insieme dei raggi estremali di \mathcal{C} e $\mu_i \in \mathbb{R}_+$, mentre la rappresentazione parametrica di un cono non puntato è

$$\mathcal{C} = \sum_{\mathbf{l}_i \in E} \lambda_i \mathbf{l}_i + \sum_{\mathbf{r}_i \in Q} \mu_i \mathbf{r}_i,$$

dove E è un insieme finito di rette di \mathcal{C} , Q è un insieme finito di raggi di \mathcal{C} , $\lambda_i \in \mathbb{R}$ e $\mu_i \in \mathbb{R}_+$.

3. il Teorema 3.87 e la Proprietà 3.95 ci permettono di dire che se partiamo da un cono poliedrale di cui si conosce la rappresentazione parametrica e si vuole individuare quella implicita, si può considerare il suo polare che quindi è definito tramite i vincoli, calcolarne la rappresentazione parametrica e ottenere quella implicita del cono di partenza.

Quindi, è sufficiente presentare l'algoritmo nel caso del passaggio dalla rappresentazione implicita a quella parametrica.

L'algoritmo di Chernikova utilizza un approccio incrementale: se $A \in \mathfrak{M}_{m,n}$ è la matrice dei coefficienti delle disequazioni e indichiamo con S_k il semispazio definito dalla k -esima disequazione, il cono \mathcal{C} si calcola seguendo il seguente schema:

$$\begin{cases} \mathcal{C}_0 = \mathbb{R}^n \\ \mathcal{C}_k = \mathcal{C}_{k-1} \cap S_k \end{cases} \quad \text{per ogni } k = 1, \dots, m. \quad (4.2)$$

L'algoritmo di Chernikova si può dividere in tre casi: il calcolo delle soluzioni non negative di un sistema disequazioni, quello delle soluzioni (positive o negative) di un sistema di disequazioni e quello delle soluzioni di un sistema composto da equazioni e disequazioni. Mentre il primo caso è descritto da Chernikova in [Che64, Che65, Che68], gli altri due casi sono stati descritti da H. Le Verge in [Le 92].

4.2.1 Soluzioni non negative

Questa sezione mostra come si comporta l'algoritmo di Chernikova nel caso in cui il cono poliedrale sia definito come

$$\mathcal{C} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, A\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}.$$

Indichiamo con $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ l'insieme non ridondante dei raggi unidirezionali al passo k -esimo e con $Q' \subseteq \mathbb{R}^n$ il rispettivo insieme al passo $(k+1)$ -esimo. In questo caso (cioè nel caso delle soluzioni non negative), prendiamo \mathbb{R}_+^n

come cono al passo iniziale \mathcal{C}_0 e l'insieme associato Q_0 uguale all'insieme $\{e_1, \dots, e_n\}$ dei vettori della base canonica.

Supponiamo quindi di essere al k -esimo passo e di aver individuato il cono \mathcal{C}_k e di doverlo ora intersecare seguendo lo schema presentato nella (4.2) con il semispazio

$$S = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \geq 0 \}.$$

Si può quindi individuare la seguente partizione dell'insieme Q :

$$Q^= = \{ \mathbf{y} \in Q \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle = 0 \} \quad (4.3)$$

$$Q^> = \{ \mathbf{y} \in Q \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle > 0 \} \quad (4.4)$$

$$Q^< = \{ \mathbf{y} \in Q \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle < 0 \} \quad (4.5)$$

e successivamente l'insieme

$$\bar{Q} = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle = 0, \mathbf{y} = \lambda \mathbf{y}_1 + \mu \mathbf{y}_2, \\ (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \in Q^> \times Q^<, \text{adj}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2), \lambda \geq 0 \end{array} \right\}, \quad (4.6)$$

dove con $\text{adj}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$ si indica che i due raggi \mathbf{y}_1 e \mathbf{y}_2 soddisfano la proprietà di adiacenza. L'insieme non ridondante Q' dei raggi estremali del nuovo cono \mathcal{C}_{k+1} è definito da:

$$Q' = Q^= \cup Q^> \cup \bar{Q}. \quad (4.7)$$

I primi due insiemi che formano Q' , cioè $Q^=$ e $Q^>$, sono composti dai raggi di Q che appartengono a $\mathcal{C}_k \cap S$, mentre \bar{Q} contiene raggi appartenenti all'iperpiano $H = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = 0 \}$ ottenuti come combinazioni positive dei raggi estremali adiacenti di Q tali che il primo è stato scelto tra quelli il cui prodotto scalare con il nuovo vincolo è strettamente maggiore di zero e il secondo tra quelli con prodotto scalare strettamente minore di zero. La proprietà di adiacenza dei due raggi scelti assicura che il nuovo raggio sia estremo: infatti, i nuovi raggi ottenuti in questo modo appartengono all'iperpiano H e appartengono anche alle 2-facce del cono \mathcal{C}_k .

Se non si richiedesse la proprietà di adiacenza nella costruzione dell'insieme \bar{Q} , l'insieme Q' potrebbe essere ridondante. Le varie implementazioni dell'algoritmo di Chernikova differiscono proprio nel modo in cui vengono eliminati i raggi ridondanti: infatti, il modo di costruire l'insieme \bar{Q} è il fattore che più influisce sull'efficienza dell'algoritmo.

Inizialmente, non veniva considerata la proprietà di adiacenza per la costruzione dei raggi, ma i raggi ridondanti venivano eliminati solamente al termine dell'intero algoritmo. Questa scelta, però, non era efficiente perché il numero degli elementi dell'insieme Q' cresce esponenzialmente.

Gli algoritmi successivi hanno iniziato ad eliminare i raggi ridondanti ad ogni passo del procedimento iterativo, evitando di considerare al passo successivo raggi che era già ridondanti.

Se indichiamo con D la matrice

$$D = \begin{pmatrix} I \\ A \end{pmatrix},$$

dove I è la matrice identità che indica i vincoli di positività delle variabili, l'algoritmo descritto in [Che65] usa la seguente regola:

Se Q è formato solamente da due raggi e se $|Q^>| = |Q^<| = 1$ e $|Q^=| = 0$, allora si combinano. Se la cardinalità di Q è maggiore di due, allora due raggi \mathbf{y}_1 e $\mathbf{y}_2 \in Q$ sono adiacenti se

$$|S(\mathbf{y}_1, D) \cap S(\mathbf{y}_2, D)| \geq 1$$

e non esiste nessun raggio \mathbf{y}' distinto dai precedenti tale che

$$S(\mathbf{y}_1, D) \cap S(\mathbf{y}_2, D) \subseteq S(\mathbf{y}', D).$$

Quindi il metodo proposto in [Che65] utilizza solamente la proprietà di adiacenza così come è descritta nella Definizione 4.9. Il test $|S(\mathbf{y}_1, D) \cap S(\mathbf{y}_2, D)| \geq 1$ è un criterio che assicura che il nuovo raggio appartiene alla superficie esterna del cono poliedrale: se questo test non è verificato il raggio non viene aggiunto all'insieme \bar{Q} , altrimenti si deve enumerare tutto Q per verificare la seconda proprietà. L'algoritmo presentato in [Che65] quindi evita l'enumerazione in un caso: cioè quando il numero di vincoli saturati dai due raggi combinati è zero.

In [Le 92] è proposto un nuovo criterio per individuare quali raggi non sono ridondanti, utilizzando il fatto che ogni raggio estremale satura almeno un vincolo:

Lemma 4.18 *Sia*

$$\mathcal{C} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$$

un cono poliedrale puntato non vuoto e

$$S = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \geq 0 \}$$

un semispazio contenuto in \mathbb{R}^n tale che $\mathcal{C} \cap S \neq \emptyset$. Sia \mathbf{y} un raggio ottenuto dalla combinazione positiva di due raggi estremale \mathbf{y}_1 e $\mathbf{y}_2 \in \mathcal{C}$ tale che $\langle \mathbf{c}, \mathbf{y} \rangle = 0$. Se

$$|S(\mathbf{y}, A)| \leq n - 3$$

allora \mathbf{y} non è un raggio estremale del nuovo cono $\mathcal{C} \cap S$.

DIMOSTRAZIONE: Ogni raggio estremo \mathbf{y}' di un cono puntato \mathcal{C} deve saturare almeno $n - 1$ vincoli che definiscono il cono e quindi $|S(\mathbf{y}', B)| \geq n - 1$, con

$$B = \begin{pmatrix} A \\ \mathbf{c} \end{pmatrix}.$$

Se \mathbf{y} è una combinazione positiva di \mathbf{y}_1 e \mathbf{y}_2 che sono due raggi estremali di \mathcal{C} e $\langle \mathbf{c}, \mathbf{y} \rangle = 0$, segue che se \mathbf{y} è un raggio estremo di $\mathcal{C} \cap S$, allora $|S(\mathbf{y}, B)| \geq n - 1$ e quindi $|S(\mathbf{y}, A)| \geq n - 2$. \square

Quindi si può dire che il processo di enumerazione è necessario solo per i raggi \mathbf{y} che saturano almeno $n - 2$ vincoli di \mathcal{C} e che cioè appartengono ad una 2-faccia di \mathcal{C} ; in caso contrario, il raggio considerato viene immediatamente escluso.

Esempio 4.19 Presentiamo ora un semplice esempio dell'applicazione di questo algoritmo. Supponiamo di considerare il cono poliedrale di \mathbb{R}^2

$$\mathcal{C} = \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right. \right\}.$$

Il cono \mathcal{C}_0 coincide con \mathbb{R}_+^2 e l'insieme Q_0 è formato dai vettori $(1, 0)^T$ e $(0, 1)^T$. Consideriamo come primo vincolo $x \leq 2y$. Tra i raggi considerati nessuno soddisfa l'equazione $x = 2y$, il punto $(0, 1)^T$ soddisfa la disequazione, mentre $(1, 0)^T$ la viola:

$$\begin{aligned} Q^= &= \emptyset, \\ Q^> &= \{(0, 1)^T\} \end{aligned}$$

e

$$Q^< = \{(1, 0)^T\}.$$

Si osserva che $(1, 0)^T$ e $(0, 1)^T$ sono adiacenti e quindi possono essere combinati in modo da individuare l'elemento che forma \bar{Q} . Questo si scrive come $\mathbf{r} = \lambda(0, 1)^T + \mu(1, 0)^T$ (con $\lambda \geq 0$) e deve essere tale da soddisfare l'equazione $x = 2y$:

$$1 \cdot (\lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1) - 2 \cdot (\lambda \cdot 1 + \mu \cdot 0) = \mu - 2\lambda = 0,$$

ottenendo come nuovo raggio $\mathbf{r} = 1 \cdot (0, 1)^T + 2(1, 0)^T = (2, 1)^T$.

Ora il nuovo insieme di raggi è $Q_1 = \{(0, 1)^T, (2, 1)^T\}$ e a questo applicare il vincolo $2x \geq y$. In modo analogo a prima otteniamo che

$$\begin{aligned} Q^= &= \emptyset, \\ Q^> &= \{(2, 1)^T\} \end{aligned}$$

e

$$Q^< = \{(0, 1)^T\}.$$

Si verifica che gli elementi di Q_1 sono adiacenti e quindi li possiamo combinare in modo da ottenere che il nuovo raggio soddisfi l'equazione $2x = y$: questo è $(1, 2)^T$.

Si ha perciò che questo cono è descritto in modo parametrico dai raggi $(2, 1)^T$ e $(1, 2)^T$.

4.2.2 Soluzioni generali

Una versione modificata dell'algoritmo di Chernikova presentato in [Le 92] calcola sia le soluzioni non negative sia quelle negative. In questo caso il cono che stiamo considerando non è necessariamente puntato, perché non vi è il vincolo che il cono sia contenuto in \mathbb{R}_+^n : il cono non è perciò descritto da combinazioni positive di raggi estremali, ma potrebbe contenere anche alcune rette. Per ottenere i generatori del cono sono quindi necessari due insiemi distinti, uno formato dai raggi bidirezionali, l'altro per i raggi unidirezionali.

Siano quindi

$$\mathcal{C}_k = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$$

il cono individuato al passo k -esimo e

$$S = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \geq 0 \}$$

il semispazio di \mathbb{R}^n con cui \mathcal{C}_k deve essere intersecato per ottenere \mathcal{C}_{k+1} . Poiché il cono non è necessariamente puntato, il lineality space non si riduce al solo vettore nullo. Quindi indichiamo con $Q = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_r\}$ un insieme finito di raggi unidirezionali e con $E = \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_t\}$ un insieme finito di raggi bidirezionali di \mathcal{C}_k . Inoltre, siano Q' ed E' i rispettivi insiemi per il cono \mathcal{C}_{k+1} .

Siano quindi $E_0 = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ l'insieme dei vettori che appartengono alla base canonica e $Q_0 \neq \emptyset$.

Ogni passo della (4.2) può essere diviso in due casi:

1. Esiste un raggio bidirezionale \mathbf{z}_k tale che $\langle \mathbf{c}, \mathbf{z}_k \rangle \neq 0$; allora si ha

$$\begin{aligned} Q' &= \{\mathbf{y}'_1, \dots, \mathbf{y}'_r, \mathbf{z}'_k\} \\ E' &= \{\mathbf{z}'_1, \dots, \mathbf{z}'_{k-1}, \mathbf{z}'_{k+1}, \dots, \mathbf{z}'_t\} \end{aligned}$$

dove \mathbf{z}'_i sono definiti come:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}'_k &= \pm \mathbf{z}_k && \text{in modo tale che} && \langle \mathbf{c}, \mathbf{z}'_k \rangle > 0 \\ \forall i \neq k : \mathbf{z}'_i &= \lambda \mathbf{z}_i + \mu \mathbf{z}_k && \text{in modo tale che} && \langle \mathbf{c}, \mathbf{z}'_i \rangle = 0 \end{aligned}$$

e \mathbf{y}'_j sono definiti come

$$\mathbf{y}'_j = \lambda \mathbf{y}_j + \mu \mathbf{z}_k, \text{ con } \lambda > 0 \quad \text{in modo tale che} \quad \langle \mathbf{c}, \mathbf{y}'_j \rangle = 0.$$

Si osserva che i vettori \mathbf{z}'_i ($i \neq k$) e \mathbf{y}'_j sono le proiezioni di \mathbf{z}_i e di \mathbf{y}_j , rispettivamente, sull'iperpiano generato da $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = 0$ lungo il vettore \mathbf{z}_k . Inoltre, il raggio \mathbf{z}'_k non è più bidirezionale e viene aggiunto all'insieme Q' dei raggi unidirezionali.

2. Tutti i raggi bidirezionali sono tali che $\langle \mathbf{c}, \mathbf{z}_k \rangle = 0$; allora si ha che l'insieme dei raggi bidirezionali è invariato e si trasforma l'insieme Q nello stesso modo in cui si faceva per trovare le soluzioni non negative. In questo caso, però viene modificato il criterio per l'enumerazione nel modo seguente:

L'enumerazione può essere evitata se l'insieme dei vincoli comuni saturati contiene al più $n - t - 3$ vincoli, dove t è la dimensione del lineality space.

Esempio 4.20 Consideriamo ora in \mathbb{R}^2 il semispazio definito dalle ordinate positive, cioè il cono che ha come suo unico vincolo la disequazione $y \geq 0$ e a questo applichiamo l'algoritmo appena spiegato per individuare i suoi generatori. Come abbiamo visto $Q_0 = \emptyset$, mentre $E_0 = \{(1, 0)^T, (0, 1)^T\}$. Consideriamo il vincolo $y \geq 0$ e individuiamo tra gli elementi di E_0 uno che non soddisfi l'equazione $y = 0$: questo è $(0, 1)^T$ che diventa un raggio senza modificarne il segno perché il suo prodotto scalare con il vincolo è già positivo. Infine dobbiamo combinare l'altra retta con $(0, 1)^T$ in modo che la nuova retta soddisfi l'equazione: $(1, 0)^T$ non viene modificata perché era già tale da soddisfare $y = 0$.

Il cono è quindi descritto in modo parametrico dalla retta di direzione $(1, 0)^T$ e dal raggio $(0, 1)^T$.

4.2.3 Caso misto: equazioni e disequazioni

Ora consideriamo il caso di un cono definito tramite un sistema di equazioni e di disequazioni, nonostante (come abbiamo già visto) le equazioni si possano scrivere usando due disequazioni. Consideriamo quindi il cono di \mathbb{R}^n

$$\mathcal{C} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}, C\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}.$$

Dal momento che abbiamo già considerato il caso delle disequazioni, possiamo limitarci a studiare solamente il caso delle equazioni: cioè il cono che abbiamo ottenuto al passo k -esimo \mathcal{C}_k viene intersecato con un iperpiano

$$H = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = 0 \}.$$

Gli insiemi Q ed E sono definiti come in precedenza: il primo come insieme dei raggi unidirezionali e il secondo come quello dei raggi bidirezionali.

Si distinguono ancora due casi:

1. Se esiste uno $z_k \notin H$, allora viene utilizzato lo stesso metodo visto nel primo punto della sezione 4.2.2, a parte per il fatto che il vettore z'_k non viene aggiunto al nuovo insieme Q' . In questo caso tutti i nuovi raggi saturano il vincolo introdotto.
2. Se tutti gli elementi di E appartengono a H , allora l'insieme E non cambia e l'insieme Q' viene definito come $Q' = Q \cup \bar{Q}$.

Esempio 4.21 *Per mostrare come si applica l'algoritmo nel caso appena descritto, supponiamo di considerare il cono $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^2$ definito solamente dal vincolo $x = y$. L'insieme Q_0 è vuoto, mentre $E_0 = \{(1, 0)^T, (0, 1)^T\}$. Il raggio bidirezionale $(1, 0)^T$ non soddisfa l'equazione: questo viene eliminato dall'insieme delle rette (e non viene nemmeno aggiunto all'insieme dei raggi), ma viene solamente combinato con l'altra retta in modo che verifichi l'equazione. Si ottiene perciò che la nuova retta è*

$$l = \lambda(1, 0)^T + \mu(0, 1)^T = (\lambda, \mu)^T$$

con $\lambda = \mu$.

Il cono \mathcal{C} è perciò descritto in modo parametrico dalla retta di direzione $(1, 1)^T$.

Si osserva che questo algoritmo può essere applicato anche nel caso delle soluzioni non negative. Infatti, consideriamo un cono puntato $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}_+^n$ con alcune equazioni nel suo sistema di vincoli: questo non contiene nessuna retta, ma è descritto solamente dai suoi raggi estremali. Se applichiamo l'algoritmo appena descritto, ricadiamo direttamente nel secondo caso, perché non vi è nessuna retta e l'insieme di raggi Q' che otteniamo coincide proprio con quello che avremmo intersecando il cono che le due disequazioni che determinano l'equazione.

4.2.4 Correttezza dell'algoritmo di Chernikova

Per dimostrare la correttezza dell'algoritmo di Chernikova dobbiamo verificare che se al passo k -esimo abbiamo individuato il cono $\mathcal{C}_k \subseteq \mathbb{R}^n$ descritto dalla matrice dei vincoli A_k e da quella dei generatori R_k che ha sulle colonne i raggi e le rette degli insiemi Q ed E , il cono $\mathcal{C}_{k+1} \subseteq \mathbb{R}^n$ ottenuto al passo successivo tramite la matrice dei vincoli A_{k+1} è descritto dalla matrice

dei generatori R_{k+1} che ha sulle colonne gli elementi degli insiemi Q' ed E' individuati dall'algoritmo.

Per fare questo distinguiamo i casi usati per descrivere l'algoritmo.

Soluzioni non negative In questo caso ricordiamo che per $k = 0$, il cono \mathcal{C}_0 coincide con \mathbb{R}_+^n , la matrice A_0 è una matrice identità (e quindi ha rango n) perché contiene i vincoli di positività delle variabili e R_0 è composta solo dai raggi unidirezionali $\{e_0, \dots, e_n\}$ e quindi è anch'essa una matrice identità.

Indichiamo con $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ il cono definito al passo $(k + 1)$ -esimo tramite la matrice dei vincoli A_{k+1} e con $\mathcal{C}' \subseteq \mathbb{R}^n$ quello determinato dalla matrice R_{k+1} composta dagli elementi di Q' individuato da (4.6) e (4.7). Dimostriamo quindi che $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$.

Per prima cosa dimostriamo che $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$. Per far questo, sia $r \in \mathcal{C}'$ e dimostriamo che $r \in \mathcal{C}$. Poiché $r \in \mathcal{C}'$ è ottenuto come combinazione positiva degli elementi di Q' , è sufficiente verificare che questi ultimi soddisfano le disequazioni che determinano \mathcal{C} . Sia quindi $r \in Q'$. Abbiamo tre casi:

- $r \in Q^>$: ciò significa che $r \in Q$ e quindi soddisfa tutti i vincoli della matrice A_k . Inoltre, soddisfa il vincolo aggiunto, perché appartiene a $Q^>$;
- $r \in Q^=$: in questo caso $r \in Q$ e satura il vincolo aggiunto;
- $r \in \bar{Q}$: in questo caso $r \notin Q$, ma è tale da saturare il vincolo aggiunto e da verificare i vincoli di A_k perché è ottenuto come combinazione positiva di raggi di Q che li soddisfano.

Quindi si ha che $r \in \mathcal{C}$ e quindi $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$.

Ora dimostriamo l'altra inclusione e cioè che $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$.

Per dimostrare che $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$ è ora sufficiente dimostrare che ogni punto di \mathcal{C} è anche un punto di \mathcal{C}' , e cioè che tutti i raggi estremali di \mathcal{C} sono anche raggi estremali di \mathcal{C}' .

Ogni raggio estremo r di \mathcal{C} deve saturare $n - 1$ vincoli linearmente indipendenti (nella matrice A_{k+1} , per le ipotesi fatte, sono contenuti anche tutti i vincoli di positività delle variabili e quindi il numero di righe di A_{k+1} è sempre maggiore o uguale a n). Si possono distinguere due casi: questi $n - 1$ vincoli appartengono alla matrice A_k , oppure tra questi vincoli vi è anche a_{k+1} . Nel primo caso, le $n - 1$ disequazioni appartengono alla matrice A_k e quindi r appartiene a $Q^> \subseteq Q'$, che definisce \mathcal{C}' . Nel secondo caso, significa che r satura la $(k + 1)$ -esima disequazione, e cioè appartiene all'iperpiano generato dal semispazio S_{k+1} e le altre $n - 2$ disequazioni appartengono alla

matrice A_k . Le $n - 2$ equazioni associate a queste $n - 2$ disequazioni individuano uno spazio di dimensione 2 e una 2-faccia F del poliedro \mathcal{C}_k che supponiamo essere generata dai due raggi estremali \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 . L'intersezione di F con l'iperpiano determinato dall'equazione $\langle \mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{x} \rangle = 0$ è una faccia di dimensione 1 ed è quindi un raggio \mathbf{r} , perché il $(k + 1)$ -esimo vincolo è indipendente dagli altri $n - 2$. Questo raggio può coincidere con \mathbf{r}_1 o con \mathbf{r}_2 oppure può accadere che $\mathbf{r}_i \in S_{k+1}$ e $\mathbf{r}_j \notin S_{k+1}$ con $i, j = 1, 2$ e $i \neq j$. In entrambi questi casi, il raggio \mathbf{r} appartiene a $Q^= \cup \bar{Q}$. Ciò implica che $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$.

Dimostriamo ora per induzione che i raggi che otteniamo sono raggi estremali. Se $k = 0$, i raggi che formano l'insieme Q_0 sono estremali per come sono stati scelti. Supponiamo ora che siano estremali al passo k -esimo e dimostriamo che lo sono anche al passo $(k + 1)$ -esimo. Per prima cosa, dimostriamo che considerando la proprietà di adiacenza nel costruire \bar{Q} , l'insieme \bar{Q} è formato solo da raggi estremali. Siano $\mathbf{r}_1 \in Q^>$ e $\mathbf{r}_2 \in Q^<$ due raggi estremali dell'insieme Q e supponiamo che siano adiacenti: dimostriamo allora che $\mathbf{r} \in \bar{Q}$ ottenuto come combinazione positiva di \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 è estremoale. Per assurdo, supponiamo che non lo sia nell'insieme Q' e che quindi possa essere scritto come combinazione positiva di altri due raggi $\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2 \in Q'$. Ciò significa che $\mathbf{r} = \mu_1 \mathbf{r}'_1 + \mu_2 \mathbf{r}'_2$ con $\mu_i > 0$ e con $\mathbf{r}'_i \neq \lambda_i \mathbf{r}$ per ogni $i = 1, 2$ e che ogni \mathbf{r}'_i deve saturare la $(k + 1)$ -esima disequazione, perché

$$\langle \mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{r} \rangle = \mu_1 \langle \mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{r}'_1 \rangle + \mu_2 \langle \mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{r}'_2 \rangle = 0.$$

Per la Proposizione 4.4 si ha che

$$\begin{aligned} S(\mathbf{r}, A_{k+1}) &= S(\mathbf{r}'_1, A_{k+1}) \cap S(\mathbf{r}'_2, A_{k+1}), \\ S(\mathbf{r}, A_k) &= S(\mathbf{r}'_1, A_k) \cap S(\mathbf{r}'_2, A_k), \end{aligned}$$

perché i raggi $\mathbf{r}, \mathbf{r}'_1$ e \mathbf{r}'_2 saturano la $(k + 1)$ -esima disequazione. Inoltre, dal momento che \mathbf{r} è ottenuto come combinazione positiva di \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 , nuovamente per la Proposizione 4.4, si ha

$$S(\mathbf{r}, A_k) = S(\mathbf{r}_1, A_k) \cap S(\mathbf{r}_2, A_k).$$

Dal momento che, otteniamo

$$S(\mathbf{r}'_1, A_k) \cap S(\mathbf{r}'_2, A_k) = S(\mathbf{r}_1, A_k) \cap S(\mathbf{r}_2, A_k),$$

si osserva che per ogni $i = 1, 2$, si ha

$$S(\mathbf{r}_1, A_k) \cap S(\mathbf{r}_2, A_k) \subseteq S(\mathbf{r}'_i, A_k).$$

Quindi arriviamo ad un assurdo perché avevamo supposto che \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 fossero adiacenti e cioè che non esistesse nessuno $\hat{\mathbf{r}} \in Q$ tale che $S(\mathbf{r}_1, A_k) \cap S(\mathbf{r}_2, A_k) \subseteq S(\hat{\mathbf{r}}, A_k)$. Inoltre, se consideriamo $\mathbf{r} \in Q^= \cup Q^>$ anche questi sono estremali, perché lo erano per il poliedro ottenuto al passo precedente.

Soluzioni generali In questo caso il cono iniziale \mathcal{C}_0 coincide con \mathbb{R}^n , l'insieme dei raggi unidirezionali Q con \emptyset e quello dei raggi bidirezionali E con $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$.

Indichiamo con $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ il cono generato dalla matrice dei vincoli A_{k+1} e con $\mathcal{C}' \subseteq \mathbb{R}^n$ quello generato dalla matrice dei generatori formata dagli elementi di Q' e di E' e dimostriamo che questi due coni coincidono. Gli insiemi Q' ed E' possono essere costruiti in due modi differenti e quindi dimostriamo l'equivalenza dei due coni distinguendo i due casi presentati nell'algoritmo.

1. In questo caso, esiste un elemento \mathbf{z}_k di E , tale che $\langle \mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{z}_k \rangle \neq 0$.

Ora dimostriamo che se $\mathbf{r} \in \mathcal{C}'$, questo verifica tutti i vincoli di A_{k+1} . Per le stesse osservazioni fatte nel caso precedente, possiamo considerare $\mathbf{r} \in Q' \cup E'$. Per come sono stati costruiti gli elementi di Q' e di E' , questi verificano il $(k+1)$ -esimo vincolo e quelli della matrice A_k , perché sono combinazioni di generatori che li soddisfano. Quindi $\mathbf{r} \in \mathcal{C}$ e $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$.

Viceversa, dimostriamo che ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ si può scrivere tramite i generatori di \mathcal{C}' , e cioè con gli elementi di $Q' \cup E'$.

Dimostriamo che l'insieme E' contiene tutte le rette che generano il $\text{lin.space}(\mathcal{C})$. Queste devono saturare tutte le disequazioni della matrice A_{k+1} : osserviamo che la riga \mathbf{a}_{k+1} è linearmente indipendente dalle righe di A_k , perché non è saturata da almeno una retta di \mathcal{C}_k . Si osserva che l'insieme delle combinazioni lineari delle soluzioni del sistema $A_{k+1}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ha dimensione $t-1$ (con $\dim(\text{lin.space}(\mathcal{C}_k)) = t$), perché il rango di A_k è $n-t$ e A_{k+1} ha rango uguale a $n-t+1$. L'insieme E' è composto da $t-1$ rette indipendenti: infatti, per come è stato costruito E_0 , questo è vero con $k=0$, e se supponiamo che questo sia vero per k , per dimostrare che è vero per $k+1$ è sufficiente osservare che, se E_k e E_{k+1} sono gli insiemi di rette che si ottengono rispettivamente al passo k -esimo e al passo $(k+1)$ -esimo, ogni elemento $\mathbf{z}'_i \in E_{k+1}$ è ottenuto come combinazione lineare di $\mathbf{z}_i \in E_k$ e di \mathbf{z}_k , che non appartiene a E_{k+1} . Gli elementi di E' sono perciò $t-1$, sono linearmente indipendenti e saturano tutte le disequazioni di A_{k+1} .

Osserviamo che se $F_i = \text{cone}(\mathbf{y}_i) + \text{lin.space}(\mathcal{C}_k)$ è una faccia estrema propria di \mathcal{C}_k , allora, per il Lemma 4.14, l'insieme $F'_i = F_i \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{x} \rangle = 0\}$ è una faccia estrema propria di \mathcal{C} , perché il rango della matrice A_{k+1} è uguale a $n-t+1$, essendo $t-1$ la dimensione del

$\text{lin.space}(\mathcal{C})$. Inoltre si può scrivere

$$\begin{aligned}
F'_i &= (\text{cone}(\mathbf{y}_i) + \text{lin.space}(\mathcal{C}_k)) \\
&\cap \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{x} \rangle = 0 \} \\
&= (\text{cone}(\mathbf{y}_i) + \text{lin.space}(\mathcal{C}) + \mathbb{R}\mathbf{z}_k) \\
&\cap \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{x} \rangle = 0 \} \\
&= (\text{cone}(\mathbf{y}'_i) + \text{lin.space}(\mathcal{C})),
\end{aligned} \tag{4.8}$$

dove $\mathbb{R}\mathbf{z}_k$ descrive l'insieme $\{ \lambda\mathbf{z}_k \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$. Dimostriamo l'ultima uguaglianza della (4.8). Si osserva che $\text{lin.space}(\mathcal{C})$ è contenuto nell'iperpiano $\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{x} \rangle = 0 \}$ per come è stato costruito. Consideriamo ora $\mathbf{x} \in (\text{cone}(\mathbf{y}_i) + \text{lin.space}(\mathcal{C}) + \mathbb{R}\mathbf{z}_k) \cap \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{x} \rangle = 0 \}$. Allora

$$\mathbf{x} = \mu\mathbf{y}_i + \sum_{j=1}^{t-1} \lambda_j \mathbf{z}_j + \lambda\mathbf{z}_k,$$

con $\mu \in \mathbb{R}_+$ e $\lambda_i, \lambda \in \mathbb{R}$ per ogni $i = 1, \dots, t-1$. Inoltre, \mathbf{x} deve anche saturare la disequazione $\langle \mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$. Quindi possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{x} \rangle &= \mu \langle \mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{y}_i \rangle + \sum_{j=1}^{t-1} \lambda_j \langle \mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{y}_j \rangle + \lambda \langle \mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{z}_k \rangle \\
&= \mu \langle \mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{y}_i \rangle + \lambda \langle \mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{z}_k \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Per come è stato definito \mathbf{y}'_i nella sezione 4.2.2, si ottiene che

$$\mathbf{x} = \bar{\mu}\mathbf{y}'_i + \sum_{j=1}^{t-1} \lambda_j \mathbf{z}_j,$$

e cioè $\mathbf{x} \in \text{cone}(\mathbf{y}'_i) + \text{lin.space}(\mathcal{C})$. Consideriamo ora $\mathbf{x} \in \text{cone}(\mathbf{y}'_i) + \text{lin.space}(\mathcal{C})$. Allora possiamo scrivere

$$\mathbf{x} = \mu'\mathbf{y}'_i + \sum_{j=1}^{t-1} \lambda_j \mathbf{z}_j,$$

con $\mu' \in \mathbb{R}_+$ e $\lambda_i \in \mathbb{R}$, per ogni $i = 1, \dots, t-1$. Per come è stato costruito \mathbf{y}'_i , si ha che

$$\mathbf{x} = \mu'(\mu\mathbf{y}_i + \lambda\mathbf{z}_k) + \sum_{j=1}^{t-1} \lambda_j \mathbf{z}_j = \bar{\mu}\mathbf{y}_i + \bar{\lambda}\mathbf{z}_k + \sum_{j=1}^{t-1} \lambda_j \mathbf{z}_j,$$

con $\mu, \bar{\mu} \in \mathbb{R}_+$ e $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$. Questo ci permette di affermare che $\mathbf{x} \in \text{cone}(\mathbf{y}_i) + \text{lin.space}(\mathcal{C}) + \mathbb{R}\mathbf{z}_k$. Inoltre, per come è definito \mathbf{y}'_i e per le proprietà del $\text{lin.space}(\mathcal{C})$ si ottiene anche che $\mathbf{x} \in \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{x} \rangle = 0 \}$.

Consideriamo ora

$$F = \{ \mathbf{x} \in \mathcal{C} \mid A_k \mathbf{x} = \mathbf{0}, \langle \mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{x} \rangle \geq 0 \}.$$

Allora, per il Lemma 4.14, F è una faccia estrema propria di \mathcal{C} , perché il rango della matrice A_{k+1} è $n - t + 1$, con $\dim(\text{lin.space}(\mathcal{C})) = t - 1$. Per come è definita F , si può scrivere

$$\begin{aligned} F &= \text{lin.space}(\mathcal{C}_k) \cap \{ \mathbf{x} \in \mathcal{C} \mid \langle \mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{x} \rangle \geq 0 \} \\ &= (\text{lin.space}(\mathcal{C}) + \mathbb{R}\mathbf{z}_k) \cap \{ \mathbf{x} \in \mathcal{C} \mid \langle \mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{x} \rangle \geq 0 \} \end{aligned}$$

e quindi ogni $\mathbf{x} \in F$ è tale che

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \left(\sum_{i=1}^{t-1} \lambda_i \mathbf{z}_i + \lambda \mathbf{z}_k \right) \cap \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle \mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{x} \rangle \geq 0 \} \\ &= \sum_{i=1}^{t-1} \lambda'_i \mathbf{z}'_i + \mu \mathbf{z}'_k, \end{aligned}$$

con $\lambda_i, \lambda, \lambda'_i \in \mathbb{R}$, per ogni $i = 1, \dots, t - 1$ e $\mu \in \mathbb{R}_+$. Si osserva che $\mathbf{x} \in F$ si può scrivere utilizzando le rette \mathbf{z}'_i e il raggio \mathbf{z}'_k per come sono stati costruiti nel procedimento descritto nella sezione 4.2.2. Quindi $F = \text{cone}(\mathbf{z}'_k) + \text{lin.space}(\mathcal{C})$.

2. In questo caso, tutti gli elementi di E saturano il vincolo $(k + 1)$ -esimo. Per come sono stati costruiti gli elementi di E' (che coincidono con quelli di E) e di Q' , si dimostra che $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$.

Per dimostrare l'inclusione opposta, dimostriamo come nei casi precedenti che tutti i generatori di \mathcal{C} sono generatori di \mathcal{C}' .

Per prima cosa osserviamo che il lineality space di \mathcal{C} è invariato rispetto a quello di \mathcal{C}_k e che è generato da $E = E'$.

Ogni raggio \mathbf{y}_i necessario alla rappresentazione di \mathcal{C} deve saturare $n - t - 1$ disequazioni linearmente indipendenti della matrice A_{k+1} . Si possono distinguere due casi: tutte le $n - t - 1$ disequazioni appartengono a A_k , oppure \mathbf{y}_i satura anche \mathbf{a}_{k+1} , che è linearmente indipendente dalle righe di A_k . Nel primo caso, \mathbf{y}_i appartiene a $Q^> \subseteq Q'$, che definisce \mathcal{C}' . Nel secondo caso, \mathbf{y}_i satura $n - t - 2$ disequazioni linearmente indipendenti

di A_k e il vincolo \mathbf{a}_{k+1} . Queste $n - t - 2$ generano una faccia F di dimensione $t + 2$, che intersecata con il semispazio S_{k+1} generato dalla disequazione $\langle \mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ forma un insieme di dimensione $t + 1$, perché il vincolo \mathbf{a}_{k+1} è indipendente dagli altri $n - t - 2$. Se l'intersezione di F con l'iperpiano corrispondente a $\langle \mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{x} \rangle = 0$ coincide proprio con \mathbf{y}_i , allora $\mathbf{y}_i \in Q^\circ$. Se invece l'iperpiano separa la $t + 2$ faccia in modo che uno dei due raggi (che non appartengono al lineality space) che la generano appartenga a S_{k+1} e l'altro no, il raggio \mathbf{y}_i ottenuto come combinazione positiva di questi due raggi appartiene a $\bar{Q} \subseteq Q'$. Questo implica che $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$.

Caso misto: equazioni e disequazioni Come abbiamo fatto nella presentazione dell'algoritmo di Chernikova in questo caso possiamo considerare solamente il caso delle equazioni.

Indichiamo anche in questo caso con $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ il cono individuato dalla matrice dei vincoli A_{k+1} e con $\mathcal{C}' \subseteq \mathbb{R}^n$ quello descritto dalla matrice dei generatori che ha sulle colonne gli elementi di Q' e di E' e dimostriamo che $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$.

Procedendo in modo analogo ai casi precedenti, si dimostra l'inclusione $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$. Infatti, ogni elemento $\mathbf{r} \in Q' \cup E'$ per come è stato costruito verifica tutti i vincoli di A_k e in più l'equazione $\langle \mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{x} \rangle = 0$.

Ora dobbiamo dimostrare che $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$; per far questo dobbiamo dimostrare che tutti i generatori di \mathcal{C} sono generatori di \mathcal{C}' . Scriviamo $H_{k+1} = H_{k+1}^+ \cap H_{k+1}^-$, dove $H_{k+1}^+ = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{x} \rangle \geq 0 \}$ e $H_{k+1}^- = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle -\mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{x} \rangle \geq 0 \}$ e intersechiamo \mathcal{C}_k prima con H_{k+1}^+ e poi con H_{k+1}^- per ricondurci ai casi precedenti.

Si possono individuare due casi:

1. Supponiamo che esiste almeno uno $\mathbf{z}_k \in E$ che non appartiene anche ad H_{k+1} . Se intersechiamo con H_{k+1}^+ , si può applicare il primo caso della sezione 4.2.2 e ottenere gli insiemi \hat{E} e \hat{Q} ; intersecando questo nuovo cono con H_{k+1}^- tutti gli elementi di \hat{E} appartengono a H_{k+1}^- e quindi applicando il secondo caso della sezione 4.2.2, otteniamo che gli insiemi $E' = \hat{E}$ e $Q' = \hat{Q} \setminus \{\mathbf{z}'_k\}$.
2. Ora supponiamo che tutti gli elementi di E appartengano a H_{k+1} . Se intersechiamo \mathcal{C}_k con H_{k+1}^+ possiamo applicare il secondo caso della sezione 4.2.2 e ottenere \hat{E} e $\hat{Q} = Q^\circ \cup Q^> \cup \bar{Q}$. Se ora intersechiamo il cono ottenuto in questo modo con H_{k+1}^- , si può riapplicare il secondo caso della sezione 4.2.2: gli elementi di $Q^>$ non appartengono a H_{k+1}^-

e tutti gli elementi di $Q^= \cup \bar{Q}$ appartengono a H_{k+1} . In questo modo si ha che $E' = E$ e $Q' = Q^= \cup \bar{Q}$.

4.3 Sistemi minimali

Come abbiamo già osservato, un poliedro può essere descritto utilizzando rappresentazioni implicite (o parametriche) diverse tra loro. Spesso, però, è utile conoscere la rappresentazione di un poliedro tramite il minore numero di vincoli o di generatori. Per aver questa condizione è necessario che i sistemi che definiscono il poliedro soddisfino alcune regole:

Proposizione 4.22 (Regole dimensionali) *Sia $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro. Si dimostra che:*

1. *la dimensione del poliedro è la somma della dimensione del ray space e di quella del lineality space;*
2. *la dimensione del ray space è*

$$n - \dim(\text{lin.space}(\mathcal{P})) - \text{num. equazioni},$$

dove ‘num. equazioni’ è il massimo numero di equazioni linearmente indipendenti che sono contenute nei sistemi di vincoli che descrivono \mathcal{P} ;

3. *la dimensione del poliedro è*

$$n - \text{num. equazioni}.$$

DIMOSTRAZIONE:

1. Dal momento che $\mathcal{P} = \mathcal{L} + \mathcal{R} + \mathcal{V}$, allora si può scrivere che

$$\mathcal{P} = \text{lin.space}(\mathcal{P}) + \text{ray space}(\mathcal{P})$$

e quindi:

$$\dim(\mathcal{P}) = \dim(\text{lin.space}(\mathcal{P})) + \dim(\text{ray space}(\mathcal{P})).$$

Possiamo scrivere questo, perché le dimensioni del lineality space e del ray space sono uniche e separabili.

2. L'insieme delle equazioni determina lo spazio affine in cui giace \mathcal{P} . Poiché ogni equazione linearmente indipendente dalle altre equazioni del sistema restringe lo spazio affine che contiene il poliedro di una dimensione,

$$\dim(\mathcal{P}) = n - (\text{num. equazioni}).$$

Per il punto precedente possiamo scrivere:

$$\dim(\mathcal{P}) = \dim(\text{lin.space}(\mathcal{P})) + \dim(\text{ray space}(\mathcal{P}))$$

e quindi

$$\dim(\text{ray space}(\mathcal{P})) = n - \dim(\text{lin.space}(\mathcal{P})) - (\text{num. equazioni}).$$

3. Per i punti precedenti sappiamo che

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{P}) &= \dim(\text{lin.space}(\mathcal{P})) + \dim(\text{ray space}(\mathcal{P})) \\ \dim(\text{ray space}(\mathcal{P})) &= n - \dim(\text{lin.space}(\mathcal{P})) - (\text{num. equazioni}). \end{aligned}$$

Quindi sostituendo nell'espressione della dimensione del poliedro quella del ray space, si ottiene che

$$\dim(\mathcal{P}) = n - \text{num. equazioni}.$$

□

Osservazione 4.23 *In un poliedro vuoto*

1. *la dimensione del lineality space è 0;*
2. *la dimensione del ray space è -1.*

DIMOSTRAZIONE:

1. Poiché il poliedro non contiene punti, non ci sono nemmeno rette. La dimensione del lineality space che coincide con il numero di rette linearmente indipendenti del poliedro è quindi 0.
2. Per definire il poliedro vuoto tramite un sistema di vincoli non soddisfacibile di dimensione n possiamo considerare $n + 1$ equazioni. Per la Proposizione 4.22, la dimensione del ray space è uguale a

$$n - (\text{num. equazioni}) - \dim(\text{lin.space}(\emptyset))$$

che quindi è $n - (n + 1) - 0 = -1$.

□

Osservazione 4.24 *In un poliedro universo $\mathcal{P} = \mathbb{R}^n$*

1. *la dimensione del lineality space è la dimensione del poliedro;*
2. *la dimensione del ray space è 0.*

DIMOSTRAZIONE:

1. Il numero di rette linearmente indipendenti in un poliedro universo è pari a n . La dimensione del lineality space è quindi proprio n .
2. Per la Proposizione 4.22, la dimensione del ray space è uguale a

$$n - (\text{num. equazioni}) - \dim(\text{lin.space}(\mathcal{P}))$$

che quindi è $n - 0 - n = 0$.

□

Proposizione 4.25 (Regole di saturazione) *Dato un poliedro $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ caratterizzato da un ray space m -dimensionale, allora*

1. *ogni disequazione che genera una faccetta deve essere saturata da almeno m punti/raggi di un sistema minimale di generatori del ray space;*
2. *ogni vertice deve saturare almeno m disequazioni e ogni raggio almeno $m - 1$ disequazioni che generano le faccette;*
3. *ogni equazione deve essere saturata da tutte le rette, da tutti i raggi e da tutti i punti;*
4. *ogni retta deve saturare tutte le equazioni e tutte le disequazioni che generano le faccette.*

DIMOSTRAZIONE:

1. In generale una k -faccia è l'unione convessa di un minimo di $k + 1$ vertici/raggi poiché ogni k -faccia giace in uno spazio generato da $k + 1$ punti affinemente indipendenti e poiché i raggi/vertici sono affinemente indipendenti. Dal momento che ogni disequazione è associata ad una $(m - 1)$ -faccia di un poliedro che è descritta da $m - 1 + 1 = m$ vertici/raggi, ogni disequazione è saturata da almeno m vertici/raggi.

2. Ogni vertice è una 0-faccia e quindi satura almeno m disequazioni. Ogni raggio è ottenuto come l'intersezione di almeno $m - 1$ faccette e quindi da almeno $m - 1$ disequazioni.
3. Poiché tutti i punti del poliedro sono tali da soddisfare le equazioni per definizione, in particolare tutti i generatori sono tali da soddisfarle. Quindi tutti i generatori del poliedro sono tali da saturare le equazioni.
4. Per il punto precedente sappiamo che le rette saturano tutte le equazioni: resta solo da dimostrare che saturano anche tutte le disequazioni. Per dimostrare questo è sufficiente fare le stesse considerazioni che ci hanno portato a scrivere le equazioni (3.11) con l'unica considerazione aggiuntiva che si devono considerare anche le combinazioni convesse dei punti.

□

Un poliedro $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ può essere descritto da diversi sistemi di vincoli e di generatori. L'algoritmo di Chernikova fornisce la rappresentazione con il minore numero di generatori di un poliedro descritto tramite la sua rappresentazione implicita. Lo stesso poliedro, però, potrebbe essere descritto da un sistema di vincoli formato da meno elementi.

Utilizzando un'operazione di semplificazione possiamo agire in modo da ottenere *sistemi minimali*.

Definizione 4.26 (Sistemi minimali) Sia \mathcal{P} un poliedro di \mathbb{R}^n e siano \mathbf{C} e \mathbf{G} rispettivamente un sistema di vincoli e un sistema di generatori che lo descrivono. Si dice che

- \mathbf{C} è minimale se
 - non esiste nessun $\mathbf{C}' \subset \mathbf{C}$ tale che $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbf{C}')$ e
 - \mathbf{C} contiene il massimo numero di equazioni linearmente che sono necessarie per descrivere \mathcal{P} ;
- $\mathbf{G} = (L, R, V)$ è in forma minimale se
 - non esiste $\mathbf{G}' = (L', R', V') \neq \mathbf{G}$ tale che $L' \subseteq L, R' \subseteq R, V' \subseteq V$ e $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbf{G}')$ e
 - \mathbf{G} contiene il massimo numero di rette linearmente indipendenti che generano il $\text{lin.space}(\mathcal{P})$.

Mostriamo ora come si può ottenere un sistema minimale di vincoli che descrive un poliedro $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$. Supponiamo che \mathbf{C} sia un sistema di vincoli che descrive \mathcal{P} e che \mathbf{G} sia il sistema minimale di generatori di \mathcal{P} ottenuto applicando l'algoritmo di Chernikova. Per poter ridurre in forma minimale il sistema \mathbf{C} conoscendo \mathbf{G} è necessario seguire alcuni passi:

1. Sia $c : \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \geq b$ una disequazione contenuta nel sistema \mathbf{C} . Se c è saturata da tutti i generatori di \mathbf{G} , e cioè $S(c, \mathbf{G}) = \mathbf{G}$, allora significa che tutto il poliedro \mathcal{P} giace sull'iperpiano descritto dall'equazione $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = b$. Quindi ogni disequazione che soddisfa questa proprietà viene trasformata in un'equazione. Procedendo in questo modo, si massimizza il numero delle equazioni contenute nel sistema di vincoli.
2. Eliminiamo dal sistema tutte le equazioni che sono linearmente dipendenti dalle altre. Quindi il sistema di vincoli contiene $n - d$ equazioni linearmente indipendenti, dove d è la dimensione del poliedro.
3. Togliamo dal sistema tutti quelle disequazioni che non generano una faccetta e che cioè non soddisfano il punto 1 della Proposizione 4.25. Inoltre, se c_1 e c_2 sono due disequazioni di \mathbf{C} tali che $S(c_1, \mathbf{G}) = S(c_2, \mathbf{G})$, allora eliminiamo c_1 (oppure c_2) dal sistema.
4. Infine, si scrivono $n - d$ variabili in funzione delle altre d variabili, utilizzando le $n - d$ equazioni che sono rimaste nel sistema \mathbf{C} .

Il sistema di vincoli che si ottiene seguendo il procedimento descritto precedentemente soddisfa la Definizione 4.26. Se $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ è un poliedro di dimensione d , per il punto 1 il sistema di vincoli contiene $n - d$ equazioni linearmente indipendenti. Infatti, un poliedro di dimensione d è contenuto in un sottoinsieme di \mathbb{R}^n di dimensione d : in particolare questo sottoinsieme è descritto dall'intersezione di $n - d$ iperpiani ognuno dei quali può essere descritto da un'equazione. Se per assurdo il sistema \mathbf{C} ottenuto tramite il procedimento precedente contenesse meno di $n - d$ equazioni linearmente indipendenti, allora esisterebbe una disequazione di \mathbf{C} tale che ogni generatore di \mathbf{G} apparterebbe all'iperpiano descritto da questa disequazione. Questo però è un assurdo, perché tutte le disequazioni saturate dai generatori di \mathbf{G} sono diventate equazioni. Inoltre, le equazioni contenute nel sistema sono esattamente $n - d$, perché sono state tolte tutte quelle linearmente dipendenti. Inoltre, se per assurdo esistesse un sistema $\mathbf{C}' = \mathbf{C} \setminus \{c\}$, con c disequazione di \mathbf{C} , tale che $\mathcal{P}(\mathbf{C}') = \mathcal{P}(\mathbf{C})$, allora la disequazione c sarebbe ridondante e cioè genererebbe la stessa faccetta generata da un'altra disequazione oppure una faccia di dimensione minore. Per il punto 3, però, ogni disequazione del

sistema \mathbf{C} genera faccette distinte e non genera facce di dimensione minore di $d - 1$, perché altrimenti non soddisferebbe il punto 1 della Proposizione 4.25. Quindi si giunge ad un assurdo. Infine, il punto 4 non elimina dal sistema nessun vincolo, ma li modifica solamente, in modo da esprimere $n - d$ variabili in funzione delle altre d . Il sistema ottenuto utilizzando il metodo precedente è perciò minimale.

Esempio 4.27 Consideriamo in \mathbb{R}^3 il poliedro \mathcal{P} descritto dal seguente sistema di vincoli:

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ x \geq 3 \\ x + y \leq 8 \\ y + z \geq 0 \\ y \geq -3 \end{cases}.$$

Applicando l'algoritmo di Chernikova, otteniamo che il poliedro è descritto dalla combinazione convessa dei vertici $V_1 = (3, 0, 0)$ e $V_2 = (8, 0, 0)$: \mathcal{P} è quindi il segmento di estremi i punti V_1 e V_2 . Cerchiamo ora di ottenere il sistema minimale di vincoli che descrive \mathcal{P} . La disequazione $y + z \geq 0$ è saturata dai due generatori di \mathcal{P} (e quindi da tutti i suoi punti): si può perciò riscrivere come equazione $y + z = 0$. Questa nuova equazione, però, è ottenibile come combinazione di altre due equazioni del sistema e quindi si può eliminare. Il nuovo sistema diventa

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ x \geq 3 \\ x + y \leq 8 \\ y \geq -3 \end{cases}.$$

Controllando quali vincoli soddisfano la Proposizione 4.25, si osserva subito che la disequazione $y \geq -3$ non soddisfa queste regole e che quindi non è necessaria nel sistema che descrive il poliedro. Si osserva, inoltre, che se sostituiamo il valore 0 alla variabile y in tutti i vincoli del sistema abbiamo che la disequazione $x + y \leq 8$ diventa $x \leq 8$ ed è necessaria per la descrizione del poliedro. Se consideriamo, inoltre, l'equazione $z = 0$, questa non modifica

nessun vincolo perché è l'unica che contiene la variabile z . Si ottiene perciò:

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ x \geq 3 \\ x \leq 8 \end{cases}.$$

Infine, possiamo osservare che lo stesso procedimento si può applicare in modo duale al sistema di generatori che descrive un poliedro. Infatti, se consideriamo un poliedro descritto tramite un sistema di generatori, possiamo applicare l'algoritmo di Chernikova e il metodo che semplifica il sistema di vincoli al suo polare e quindi ottenere il sistema minimale di vincoli e di generatori del poliedro iniziale.

Capitolo 5

Poliedri non necessariamente chiusi

5.1 Nozioni preliminari di topologia

Si chiama *struttura topologica* o *topologia* su un insieme $S \neq \emptyset$ un sottoinsieme \mathcal{A} dell'insieme delle parti di S , cioè un sottoinsieme di $\wp(S) = \{S' \mid S' \subseteq S\}$, tale che $\emptyset, S \in \mathcal{A}$, per ogni famiglia $(A_i)_{i \in I}$ di elementi di \mathcal{A} , $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$ e se $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, allora anche $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$. La coppia (S, \mathcal{A}) si dice *spazio topologico*, gli elementi di S prendono il nome di *punti* di S e S si dice *sostegno* dello spazio topologico; gli elementi di \mathcal{A} si dicono *insiemi aperti* o *aperti* della topologia. Si dice *topologia banale* la topologia che ha come aperti solamente \emptyset e S . Un sottoinsieme I di S si dice *intorno di un punto* s_0 di S se esiste un aperto A contenuto in I e contenente s_0 , cioè se esiste un aperto A tale che $s_0 \in A \subseteq I$.

In generale, dato uno spazio topologico (S, \mathcal{A}) si definisce *chiuso* di S ogni insieme $C \subseteq S$ tale che il suo complementare, $\complement C = S \setminus C$, sia aperto. Si può osservare che l'insieme S e il \emptyset sono chiusi, perché $\complement S = \emptyset$ e $\complement \emptyset = S$ sono degli aperti di \mathcal{A} , che l'intersezione di una qualsiasi famiglia (non vuota) di chiusi è un chiuso e che l'unione di un numero finito di chiusi è un chiuso.

Dato uno spazio topologico (S, \mathcal{A}) , si definisce *chiusura* di un insieme $X \subseteq S$ ed è indicata con $\mathbb{C}(X)$ l'insieme ottenuto come intersezione di tutti i chiusi che contengono X , cioè il più piccolo chiuso contenente X . Si osserva che $X \subseteq \mathbb{C}(X)$, che $X = \mathbb{C}(X)$ se X è chiuso e che se $X \subseteq Y \subseteq S$, allora $\mathbb{C}(X) \subseteq \mathbb{C}(Y)$. Inoltre, se $\{X_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di sottoinsiemi di S , con $I \neq \emptyset$, allora $\mathbb{C}(\bigcap_{i \in I} X_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} \mathbb{C}(X_i)$; se I è finito, allora $\mathbb{C}(\bigcup_{i \in I} X_i) = \bigcup_{i \in I} \mathbb{C}(X_i)$. Ogni punto della chiusura di X è detto *punto di aderenza* o *punto di chiusura* per X . Inoltre, si osserva che $x \in \mathbb{C}(X)$ se e solo se per

ogni intorno U di \mathbf{x} risulta $U \cap X \neq \emptyset$.

Nel seguito useremo la topologia di \mathbb{R}^n che viene detta *topologia naturale*. Per definirla, è necessario introdurre il concetto di *distanza* di due punti di \mathbb{R}^n : dati $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, si dice *distanza* tra \mathbf{x} e \mathbf{y} il numero reale non negativo $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$. Dato un punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ e un reale $r > 0$ si dice *intorno sferico di centro \mathbf{x}_0 e raggio r* l'insieme $S_{\mathbf{x}_0, r}$ dei punti $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tali che $d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) < r$. Inoltre, un sottoinsieme A di \mathbb{R}^n è detto *aperto* se per ogni $\mathbf{x}_0 \in A$ esiste un intorno sferico di centro \mathbf{x}_0 e raggio opportuno tutto contenuto in A .

5.2 Poliedri NNC

Fino a questo punto abbiamo sempre considerato poliedri descritti da sistemi di vincoli in cui tutte le disequazioni erano non strette, cioè sempre caratterizzate da \leq o da \geq . Ora estendiamo i concetti proposti in modo che i sistemi di vincoli possano contenere anche disequazioni strette ($<$ e $>$).

Definizione 5.1 (Poliedri NNC) *L'insieme $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ è un poliedro NNC se e solo se può essere scritto come intersezione di un numero finito di semispazi (non necessariamente chiusi) di \mathbb{R}^n .*

Si può osservare che un poliedro chiuso è anche un poliedro NNC.

La teoria presentata in [HPR94, HPR97] ci permette di descrivere un qualsiasi poliedro NNC $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ utilizzando un poliedro chiuso $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$: indicheremo con ε la dimensione aggiuntiva dello spazio.

Consideriamo un poliedro di \mathbb{R}^n definito come $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbf{C})$, con \mathbf{C} il sistema di vincoli

$$\mathbf{C} = \{ \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle \bowtie_i b_i \mid i \in \{1, \dots, m\}, \mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n, \bowtie_i \in \{>, \geq, =\}, b_i \in \mathbb{R} \},$$

allora il *poliedro rappresentazione* è definito come $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\text{con_repr}(\mathbf{C}))$, dove

$$\begin{aligned} \text{con_repr}(\mathbf{C}) &\stackrel{\text{def}}{=} \{0 \leq \varepsilon \leq 1\} \\ &\cup \{ \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle - 1 \cdot \varepsilon \geq b_i \mid i \in \{1, \dots, m\}, \bowtie_i \in \{>\} \} \\ &\cup \{ \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle + 0 \cdot \varepsilon \bowtie_i b_i \mid i \in \{1, \dots, m\}, \bowtie_i \in \{\geq, =\} \}. \end{aligned}$$

Dobbiamo osservare che la scelta del valore -1 per il coefficiente della ε nei vincoli che rappresentano le disequazioni strette è arbitraria: è sufficiente scegliere un qualsiasi valore negativo. In modo analogo, anche la scelta del vincolo $\varepsilon \leq 1$ è arbitraria: infatti potrebbe essere sostituito da un qualsiasi vincolo del tipo $\varepsilon \leq \delta$, con $\delta > 0$.

Inoltre, se un poliedro NNC $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ si può rappresentare con \mathbf{C}_1 e con \mathbf{C}_2 , dove $\mathbf{C}_1 \neq \mathbf{C}_2$, allora può accadere che $\mathcal{Q}(\text{con_repr}(\mathbf{C}_1)) \neq \mathcal{Q}(\text{con_repr}(\mathbf{C}_2))$.

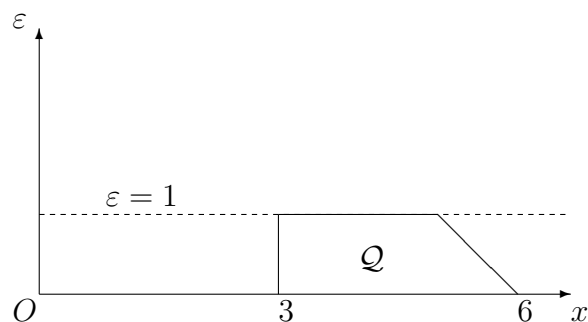


Figura 5.1: Poliedro $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{R}^2$ ottenuto nell'Esempio 5.2.

Esempio 5.2 Consideriamo il poliedro $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}$ descritto dal seguente sistema di vincoli:

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x < 6 \end{cases}.$$

Il poliedro si può perciò scrivere come:

$$\mathcal{P} = \{ x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x < 6 \}.$$

Seguendo la tecnica descritta precedentemente, possiamo trasformare la disequazione stretta che descrive il poliedro $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}$ in una disequazione non stretta e ottenere il poliedro $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{R}^2$: la disequazione $x < 6$ si trasforma in $6 - x - \varepsilon \geq 0$. Il poliedro $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{R}^2$ è rappresentato in Figura 5.1 e si scrive come:

$$\mathcal{Q} = \{ (x, \varepsilon)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 3, x + \varepsilon \leq 6, 0 \leq \varepsilon \leq 1 \}.$$

Sia $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro NNC con \mathbf{C} un sistema di vincoli che lo descrive e sia $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ un poliedro chiuso tale che $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\text{con_repr}(\mathbf{C}))$. Si può osservare che tutti i punti di \mathcal{Q} che appartengono all'iperpiano descritto da $\varepsilon = 0$ corrispondono ai punti della chiusura di \mathcal{P} . Invece, i punti di \mathcal{Q} caratterizzati dalla coordinata $\varepsilon > 0$ corrispondono ai punti di \mathcal{P} . Infatti, se consideriamo l'Esempio 5.2, i punti con $\varepsilon = 0$, soddisfano le disequazioni $3 \leq x \leq 6$, mentre proiettando i punti con $\varepsilon > 0$ sull'iperpiano di equazione $\varepsilon = 0$ otteniamo punti che si avvicinano al punto A di ascissa 6, ma nessuno di questi coincide con A . Inoltre, si osserva che per come è stato definito il sistema $\text{con_repr}(\mathbf{C})$ a partire dal sistema \mathbf{C} , le equazioni e le disequazioni di $\text{con_repr}(\mathbf{C})$ che derivano da equazioni o disequazioni non strette di \mathbf{C} sono tali che il corrispondente iperpiano è parallelo all'asse ε . Invece, gli iperpiani corrispondenti a disequazioni di $\text{con_repr}(\mathbf{C})$ che derivano da disequazioni strette di \mathbf{C} hanno intersezione non vuota con l'asse ε . Queste osservazioni verranno formalizzate in seguito quando si parlerà di ε -rappresentazioni di poliedri NNC.

Forniamo ora una rappresentazione parametrica dei poliedri NNC in modo analogo a quella già proposta per i poliedri chiusi. Per far questo è necessario considerare tra i possibili generatori, oltre ai raggi, alle rette e ai punti, anche i punti di chiusura.

Lemma 5.3 *Sia $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbf{C})$ un poliedro NNC di \mathbb{R}^n e $\mathbf{v} \in \mathbb{C}(\mathcal{P})$. Allora ogni disequazione di \mathbf{C} con vettore dei coefficienti $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ e termine noto $b \in \mathbb{R}$ è tale che $\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle \geq b$.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $\mathcal{P} = \bigcap_{i \in I} H_i$, con H_i semispazi e iperpiani definiti rispettivamente dalle disequazioni e dalle equazioni di \mathbf{C} . Per le proprietà della chiusura topologica, abbiamo che

$$\mathbb{C}(\mathcal{P}) = \mathbb{C}\left(\bigcap_{i \in I} H_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} \mathbb{C}(H_i) :$$

quindi se $\mathbf{v} \in \mathbb{C}(\mathcal{P})$, allora $\mathbf{v} \in \mathbb{C}(H_i)$ per ogni $i \in I$. Se c_i è una generica disequazione di \mathbf{C} con vettore dei coefficienti \mathbf{a}_i e termine noto b_i , allora se H_i è il semispazio definito da c_i , il punto \mathbf{v} appartiene a $\mathbb{C}(H_i)$, che è definito dalla disequazione $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle \geq b_i$. Quindi, dal momento che $\mathbf{v} \in \mathbb{C}(H_i)$, si ha che $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{v} \rangle \geq b_i$. \square

Proposizione 5.4 *Sia $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro NNC. Allora $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ è un punto di chiusura per \mathcal{P} se e solo se $\mathcal{P} \neq \emptyset$ e per ogni punto \mathbf{p} di \mathcal{P} e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $0 < \lambda < 1$, si ha che $\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda)\mathbf{c} \in \mathcal{P}$.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbf{C})$ un poliedro NNC di \mathbb{R}^n . Se $\mathbf{c} \in \mathbb{C}(\mathcal{P})$, allora $\mathcal{P} \neq \emptyset$, perché la chiusura dell'insieme vuoto è ancora l'insieme vuoto. Consideriamo ora un generico punto $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ e un $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $0 < \lambda < 1$: dobbiamo dimostrare che $\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda)\mathbf{c}$ appartiene a \mathcal{P} . Sia c un generico vincolo del sistema \mathbf{C} con vettore dei coefficienti $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ e termine noto $b \in \mathbb{R}$. Se c è un'equazione, allora

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle = \lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{p} \rangle + (1 - \lambda) \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle = b;$$

se c è una disequazione, allora per il Lemma 5.3

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \geq b.$$

Quindi, se c è una disequazione stretta, si ha

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle = \lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{p} \rangle + (1 - \lambda) \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle > b,$$

mentre se è una disequazione non stretta, si ha

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle = \lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{p} \rangle + (1 - \lambda) \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \geq b.$$

Dal momento che c era un generico vincolo di \mathbf{C} , si ha che \mathbf{v} soddisfa tutti i vincoli che definiscono \mathcal{P} e quindi $\mathbf{v} \in \mathcal{P}$.

Viceversa, supponiamo che $\mathcal{P} \neq \emptyset$ e $\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{c} \in \mathcal{P}$ per ogni $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ e $0 < \lambda < 1$: dobbiamo dimostrare che $\mathbf{c} \in \mathcal{C}(\mathcal{P})$. Per far questo, sia $\lambda_n = \frac{1}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$: si ha che $0 < \lambda_n < 1$ e che $\mathbf{v}_n \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_n \mathbf{p} + (1 - \lambda_n) \mathbf{c} \in \mathcal{P}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si osserva che ogni intorno circolare di centro \mathbf{c} e raggio λ_n ha intersezione non vuota con \mathcal{P} , perché $\mathbf{v}_m \in \mathcal{P}$ per ogni $m \geq n$ e quindi $\mathbf{c} \in \mathcal{C}(\mathcal{P})$. \square

Sia $\mathbf{G} = (L, R, V, C)$ un sistema di generatori detto *sistema di generatori esteso* con $L = \{\mathbf{l}_k\}_{k \in K}$ un insieme finito di rette, con $R = \{\mathbf{r}_h\}_{h \in H}$ un insieme finito di raggi, con $V = \{\mathbf{v}_i\}_{i \in I}$ e $C = \{\mathbf{c}_j\}_{j \in J}$ due insiemi finiti di punti, allora il poliedro $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbf{G})$ si può scrivere come

$$\mathcal{P} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} \mathbf{x} = \sum_{k \in K} \lambda_k \mathbf{l}_k + \sum_{h \in H} \mu_h \mathbf{r}_h + \sum_{i \in I} \nu_i \mathbf{v}_i + \sum_{j \in J} \eta_j \mathbf{c}_j, \\ \text{con } \lambda_k \in \mathbb{R}, \mu_h, \nu_i, \eta_j \in \mathbb{R}_+, \boldsymbol{\nu} \neq \mathbf{0}, \sum_{i \in I} \nu_i + \sum_{j \in J} \eta_j = 1 \end{array} \right. \right\}, \quad (5.1)$$

dove l'insieme V contiene punti di \mathcal{P} , mentre C punti di chiusura di \mathcal{P} . La condizione $\boldsymbol{\nu} \neq \mathbf{0}$ assicura che almeno uno dei punti di V giochi un ruolo attivo (cioè abbia coefficiente non nullo) nella combinazione convessa degli elementi di V e C . Dalla Proposizione 5.4 segue che i vettori di C sono punti di chiusura di \mathcal{P} . Dal momento che le rette, i raggi e i punti di chiusura hanno bisogno di un punto di supporto, abbiamo che $\mathcal{P} = \emptyset$ se e solo se $V = \emptyset$.

Mostriamo ora come si può ottenere una rappresentazione di un poliedro NNC $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ nello spazio \mathbb{R}^{n+1} fornendo un sistema di generatori che deriva dal sistema di generatori esteso che descrive il poliedro \mathcal{P} . Se $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbf{G})$, con $\mathbf{G} = (L, R, V, C)$, il poliedro chiuso corrispondente \mathcal{Q} è descritto da un sistema di generatori $\text{gen_repr}(\mathbf{G}) \stackrel{\text{def}}{=} (L', R', V')$ dove

$$\begin{aligned} L' &= \{ (\mathbf{l}^T, 0)^T \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathbf{l}^T \in L \}, \\ R' &= \{ (\mathbf{r}^T, 0)^T \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathbf{r}^T \in R \}, \\ V' &= \{ (\mathbf{v}^T, 1)^T \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathbf{v}^T \in V \} \\ &\quad \cup \{ (\mathbf{x}^T, 0)^T \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathbf{x}^T \in V \cup C \}. \end{aligned}$$

Anche in questo caso la scelta del valore 1 per il coefficiente della ε nel caso dei punti di \mathcal{Q} che derivano dagli elementi di V è arbitraria: si potrebbe usare

un qualsiasi valore $\delta > 0$. Inoltre, se \mathcal{P} è un poliedro NNC di \mathbb{R}^n tale che $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbf{G}_1) = \mathcal{P}(\mathbf{G}_2)$ con $\mathbf{G}_1 \neq \mathbf{G}_2$, allora può accadere che $\mathcal{Q}(\text{gen_repr}(\mathbf{G}_1)) \neq \mathcal{Q}(\text{gen_repr}(\mathbf{G}_2))$.

Si può osservare che se consideriamo il poliedro NNC $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbf{G})$ e il corrispondente poliedro chiuso $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\text{gen_repr}(\mathbf{G}))$, allora l'insieme V' del sistema $\text{gen_repr}(\mathbf{G})$ contiene per ogni $\mathbf{v} \in V$ sia il punto $(\mathbf{v}^T, 0)^T$ sia $(\mathbf{v}^T, 1)^T$. Quindi, se $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$, allora avremo che sia $(\mathbf{x}^T, 0)^T$ che $(\mathbf{x}^T, \delta)^T$, con $\delta > 0$, sono punti di \mathcal{Q} . Questa proprietà codifica in modo esplicito, all'interno della rappresentazione \mathcal{Q} , il fatto che ogni punto \mathbf{x} del poliedro è anche un punto della chiusura del poliedro.

Definizione 5.5 (ε -rappresentazione) *Si dice che un poliedro chiuso $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ è una ε -rappresentazione se e solo se*

$$\exists \delta > 0 . \mathcal{Q} \subseteq \{ (\mathbf{x}^T, \varepsilon)^T \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \leq \varepsilon \leq \delta \}; \quad (5.2)$$

$$(\exists \varepsilon > 0 . (\mathbf{x}^T, \varepsilon)^T \in \mathcal{Q}) \implies (\mathbf{x}^T, 0)^T \in \mathcal{Q}. \quad (5.3)$$

Si dice che \mathcal{Q} è una ε -rappresentazione per un poliedro NNC $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ e si indica con $\mathcal{Q} \Rightarrow_\varepsilon \mathcal{P}$ se \mathcal{Q} è una ε -rappresentazione e

$$\mathcal{P} = \llbracket \mathcal{Q} \rrbracket \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \exists \varepsilon > 0 . (\mathbf{x}^T, \varepsilon)^T \in \mathcal{Q} \}. \quad (5.4)$$

Proposizione 5.6 *Sia $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbf{C}) = \mathcal{P}(\mathbf{G})$ un poliedro NNC di \mathbb{R}^n . Allora $\mathcal{Q}(\text{con_repr}(\mathbf{C})) \Rightarrow_\varepsilon \mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}(\text{gen_repr}(\mathbf{G})) \Rightarrow_\varepsilon \mathcal{P}$.*

DIMOSTRAZIONE: Per prima cosa dimostriamo che $\mathcal{Q}(\text{con_repr}(\mathbf{C})) \Rightarrow_\varepsilon \mathcal{P}$.

La condizione (5.2) della Definizione 5.5 segue direttamente dalla definizione di con_repr .

Per dimostrare la condizione (5.3) della Definizione 5.5, supponiamo che $(\mathbf{v}^T, e)^T \in \mathcal{Q}$. Questo punto soddisfa tutti vincoli c di $\text{con_repr}(\mathbf{C})$, cioè sia le equazioni $c : \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = b$ che le disequazioni $c : \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle + s \cdot \varepsilon \geq b$. Per la condizione (5.2), $e > 0$ e, per la definizione di con_repr , $s \leq 0$. Si ha che $\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle = b$, se c era un'equazione, e $\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle \geq b$, se c era una disequazione. Quindi, $(\mathbf{v}^T, 0)^T \in \mathcal{Q}$.

Per dimostrare la condizione (5.4) della Definizione 5.5, supponiamo per prima cosa che esista $e > 0$ tale che $(\mathbf{v}^T, e)^T \in \mathcal{Q}$. Se c è un vincolo di \mathbf{C} con vettore dei coefficienti \mathbf{a} e termine noto b , allora esiste un vincolo $c' \in \text{con_repr}(\mathbf{C})$ che deriva da c . Poiché $(\mathbf{v}^T, e)^T$ soddisfa c' , abbiamo che se c era un'equazione, allora $\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle = b$, mentre se c' era una disequazione, allora il corrispondente vincolo c' di con_repr per definizione ha il coefficiente

della ε uguale a 0 o a -1 , a seconda che c fosse una disequazione non-stretta o stretta. Se $s = 0$, allora $e \cdot s = 0$ e quindi $\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle \geq b$; se $s = -1$, allora $e \cdot s < 0$ e quindi $\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle > b$. Si ha perciò che $\mathbf{v} \in \mathcal{P}$.

Viceversa, supponiamo che $\mathbf{v} \in \mathcal{P}$: \mathbf{v} soddisfa tutti i vincoli c di \mathbf{C} . Sia c' un generico vincolo in $\text{con_repr}(\mathbf{C})$. Dobbiamo dimostrare che esiste un $\delta_{c'} > 0$, tale che per ogni $e < \delta_{c'}$ il punto $(\mathbf{v}^T, e)^T$ soddisfa il vincolo c' . Se c' è un'equazione allora è soddisfatta da ogni punto $(\mathbf{v}^T, e)^T$ con $e \in \mathbb{R}$. Sia ora c' una disequazione della forma $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle + s \cdot \varepsilon \geq b$: per la definizione di con_repr si ha $s \in \{0, 1\}$. Se $s = 0$, allora per ogni $e \in \mathbb{R}$, il punto $(\mathbf{v}^T, e)^T$ soddisfa c' . Se $s = -1$, allora per la definizione di con_repr esiste un vincolo $c \in \mathbf{C}$ della forma $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle > b$. Allora per ogni $e < \langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle - b$, il punto $(\mathbf{v}^T, e)^T$ soddisfa il vincolo c' : in questo caso $\delta_{c'} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle - b$. Se δ è il minimo dell'insieme $\{\delta_{c'} \in \mathbb{R} \mid c' \in \text{con_repr}(\mathbf{C})\}$, allora $(\mathbf{v}^T, \delta)^T$ appartiene a \mathcal{Q} .

Ora dimostriamo che $\mathcal{Q}(\text{gen_repr}(\mathbf{G})) \cong_{\varepsilon} \mathcal{P}$.

Sia $\mathbf{G} = (L, R, V, C)$, con $L = \{\mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_t\}$, $R = \{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k\}$, $V = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\ell\}$ e $C = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_m\}$ e sia $\mathbf{G}' = (L', R', V')$ definito come $\mathbf{G}' = \text{gen_repr}(\mathbf{G})$ con $L' = \{\mathbf{l}'_1, \dots, \mathbf{l}'_t\}$, $R' = \{\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_k\}$, $V' = \{\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_h\}$ con $h = m + 2\ell$ e

$$\mathbf{v}'_i = \begin{cases} (\mathbf{c}_i^T, 0)^T, & \text{se } 1 \leq i \leq m; \\ (\mathbf{v}_i^T, 1)^T, & \text{se } m + 1 \leq i \leq m + \ell; \\ (\mathbf{v}_i^T, 0)^T, & \text{se } m + \ell + 1 \leq i \leq m + 2\ell. \end{cases}$$

Per la (5.1), sappiamo che $(\mathbf{v}^T, e)^T \in \mathcal{Q}$ se e solo se esistono $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^t$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}_+^k$ e $\boldsymbol{\nu}' \in \mathbb{R}_+^h$ con $\sum_{i=1}^h \nu'_i = 1$ tali che

$$(\mathbf{v}^T, e)^T = \sum_{i=1}^t \lambda_i \mathbf{l}'_i + \sum_{i=1}^k \mu_i \mathbf{r}'_i + \sum_{i=1}^h \nu'_i \mathbf{v}'_i. \quad (5.5)$$

Per dimostrare la condizione (5.2) della Definizione 5.5 sia $(\mathbf{v}^T, e)^T \in \mathcal{Q}$: si osserva che $0 \leq e \leq 1$ perché per la (5.5) il valore e è ottenuto come combinazione convessa in cui coefficienti appartengono all'insieme $\{0, 1\}$.

Per dimostrare la condizione (5.3) della Definizione 5.5, consideriamo $(\mathbf{v}^T, e)^T \in \mathcal{Q}$, con $e > 0$. Scriviamo ora $(\mathbf{v}^T, e)^T$ secondo la descrizione ottenuta dalla (5.5) e sia $\boldsymbol{\nu}'' \in \mathbb{R}_+^h$ definito come

$$\nu''_i \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \nu'_i, & \text{se } 1 \leq i \leq m; \\ 0, & \text{se } m + 1 \leq i \leq m + \ell; \\ \nu'_{i-\ell} + \nu'_i, & \text{se } m + \ell + 1 \leq i \leq m + 2\ell. \end{cases}$$

Poiché abbiamo che $\sum_{i=1}^h \nu_i'' = 1$, per la (5.1) abbiamo che

$$\sum_{i=1}^t \lambda_i \mathbf{l}_i + \sum_{i=1}^k \mu_i \mathbf{r}'_i + \sum_{i=1}^h \nu_i'' \mathbf{v}'_i = (\mathbf{v}^T, 0)^T$$

descrive un altro punto di \mathcal{Q} .

Per dimostrare la condizione (5.4) della Definizione 5.5, dobbiamo dimostrare che $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ se e solo se esiste un $e > 0$ tale che $(\mathbf{p}^T, e)^T \in \mathcal{Q}$.

Supponiamo che esista un $e > 0$ tale che $(\mathbf{p}^T, e)^T \in \mathcal{Q}$ che si può esprimere secondo la (5.5) come

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^h \lambda_i \mathbf{l}_i + \sum_{i=1}^k \mu_i \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^m \nu'_i \mathbf{c}_i + \sum_{i=m+1}^{m+\ell} \nu'_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=m+\ell+1}^{m+2\ell} \nu'_i \mathbf{v}_i.$$

Sia ora $\boldsymbol{\eta} = (\nu'_1, \dots, \nu'_m)^T \in \mathbb{R}_+^m$ e sia $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}_+^\ell$ tale che $\nu_i = \nu'_{m+i} + \nu'_{m+\ell+i}$, per ogni $i \in \{1, \dots, \ell\}$. Allora si ha che $\sum_{i=1}^\ell \nu_i + \sum_{i=1}^m \eta_i = \sum_{i=1}^h \nu'_i = 1$ e che $\boldsymbol{\eta} \neq \mathbf{0}$: in questo modo per la (5.1) abbiamo che

$$\sum_{i=1}^h \lambda_i \mathbf{l}_i + \sum_{i=1}^k \mu_i \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^\ell \nu_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^m \eta_i \mathbf{c}_i = \mathbf{p}$$

è un punto di $\mathcal{P} = \mathcal{P}(L, R, V, C)$.

Supponiamo ora che $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$. Per la (5.1) esistono $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^t$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}_+^k$, $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}_+^\ell$ e $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}_+^m$ tale che $\boldsymbol{\nu} \neq \mathbf{0}$, $\sum_{i=1}^\ell \nu_i + \sum_{i=1}^m \eta_i = 1$ e

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^t \lambda_i \mathbf{l}_i + \sum_{i=1}^k \mu_i \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^\ell \nu_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^m \eta_i \mathbf{c}_i.$$

Sia ora $h = m + 2 \cdot \ell$ e sia $\boldsymbol{\nu}' \in \mathbb{R}_+^h$ tale che

$$\nu'_i = \begin{cases} \eta_i, & \text{se } 1 \leq i \leq m; \\ \nu_{i-m}, & \text{se } m+1 \leq i \leq \ell; \\ 0, & \text{se } m+\ell+1 \leq i \leq m+2\ell. \end{cases}$$

Si osserva che $\boldsymbol{\nu}' \neq \mathbf{0}$ e $\sum_{i=1}^h \nu'_i = 1$. Allora per la 5.1, si ha che

$$\sum_{i=1}^t \lambda_i \mathbf{l}_i + \sum_{i=1}^k \mu_i \mathbf{r}'_i + \sum_{i=1}^h \nu'_i \mathbf{v}'_i = (\mathbf{p}^T, e)^T$$

è un punto di $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(L', R', V')$, con $e > 0$. □

Enunciamo e dimostriamo ora un teorema per i poliedri NNC analogo a quello di Minkowski e di Weyl per i poliedri chiusi. Prima però facciamo alcune osservazioni che servono per la dimostrazione di questo teorema.

Lemma 5.7 *Sia $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro NNC e \mathbf{C}_1 un sistema di vincoli di \mathbb{R}^n contenente solo equazioni e disequazioni non-strette tale che $\mathcal{Q}(\mathbf{C}_1) \Rightarrow_\epsilon \mathcal{P}$. Allora esiste un sistema di vincoli (equazioni, disequazioni e disequazioni strette) tale che $\mathcal{Q}(\text{con_repr}(\mathbf{C})) \Rightarrow_\epsilon \mathcal{P}$.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_1(\mathbf{C}_1)$ e consideriamo il sistema di vincoli $\mathbf{C} = \mathbf{C}' \cup \mathbf{C}'' \cup \mathbf{C}'''$, con

$$\begin{aligned}\mathbf{C}' &= \left\{ \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle > b \mid (\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle + s \cdot \varepsilon \geq b) \in \mathbf{C}_1, s < 0, \mathbf{a} \neq \mathbf{0} \right\}, \\ \mathbf{C}'' &= \left\{ \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \geq b \mid (\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \geq b) \in \mathbf{C}_1, \mathbf{a} \neq \mathbf{0} \right\}, \\ \mathbf{C}''' &= \left\{ \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = b \mid (\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = b) \in \mathbf{C}_1, \mathbf{a} \neq \mathbf{0} \right\}.\end{aligned}$$

Consideriamo $\mathbf{C}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \text{con_repr}(\mathbf{C})$ e $\mathcal{Q}_2 = \mathcal{Q}_2(\mathbf{C}_2)$. Allora per la definizione di con_repr abbiamo che $\mathbf{C}_2 = \{0 \leq \varepsilon \leq 1\} \cup \mathbf{C}'_2 \cup \mathbf{C}'' \cup \mathbf{C}'''$, dove

$$\mathbf{C}'_2 = \left\{ \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle - \varepsilon \geq b \mid (\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle + s \cdot \varepsilon \geq b) \in \mathbf{C}_1, s < 0, \mathbf{a} \neq \mathbf{0} \right\}.$$

Per la Proposizione 5.6, \mathcal{Q}_2 soddisfa le condizioni (5.2) e (5.3) della Definizione 5.5. Resta solo da dimostrare che $\llbracket \mathcal{Q}_1 \rrbracket = \llbracket \mathcal{Q}_2 \rrbracket$.

Supponiamo che $\mathbf{p} \in \llbracket \mathcal{Q}_1 \rrbracket$: allora esiste $e > 0$ tale che $(\mathbf{p}^T, e)^T \in \mathcal{Q}_1$ e quindi $(\mathbf{p}^T, e)^T$ soddisfa tutti i vincoli di \mathbf{C}_1 . Perciò $(\mathbf{p}^T, e')^T$ soddisfa tutti i vincoli in $\mathbf{C}'' \cup \mathbf{C}'''$ per ogni $e' \in \mathbb{R}$. Supponiamo che $c_1 : (\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle + s \cdot \varepsilon \geq b) \in \mathbf{C}_1$, con $s < 0$ e $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$: $(\mathbf{p}^T, e)^T$ soddisfa c_1 e $-s \cdot e > 0$. Inoltre, se $c' : (\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle - \varepsilon \geq b)$, allora $c' \in \mathbf{C}'_2$: per ogni $0 < e' \leq -s \cdot e$, $(\mathbf{p}^T, e')^T$ soddisfa c' . Quindi, se e_0 è il minimo dell'insieme

$$\{1\} \cup \left\{ -s \cdot e \mid (\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle + s \cdot \varepsilon \geq b) \in \mathbf{C}_1, \mathbf{a} \neq \mathbf{0} \right\},$$

otteniamo che $0 < e_0 \leq 1$ e $(\mathbf{p}^T, e_0)^T \in \mathcal{Q}_2$: abbiamo quindi che $\mathbf{p} \in \llbracket \mathcal{Q}_2 \rrbracket$.

Supponiamo ora di considerare $\mathbf{p} \in \llbracket \mathcal{Q}_2 \rrbracket$: esiste $0 < e \leq 1$ tale che $(\mathbf{p}^T, e)^T \in \mathcal{Q}_2$ e che perciò soddisfa tutti i vincoli di \mathbf{C}_2 . In particolare, si osserva che soddisfa i vincoli di $\mathbf{C}'' \cup \mathbf{C}'''$ per ogni $e' \in \mathbb{R}$. Consideriamo ora la disequazione $c' : (\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle - \varepsilon \geq b) \in \mathbf{C}'_2$, con $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$: il punto $(\mathbf{p}^T, e)^T$

soddisfa c' . Inoltre, se consideriamo il vincolo $c_1 : (\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle + s \cdot \varepsilon \geq b)$, con $s < 0$, allora $c_1 \in \mathbf{C}_1$ e $-\frac{e}{s} > 0$. Quindi, per ogni $0 < e' \leq -\frac{e}{s}$, (\mathbf{p}, e') verifica c_1 . Se e_0 è il minimo dell'insieme

$$\left\{ \delta \mid (\varepsilon \leq \delta) \in \mathbf{C}_1 \right\} \cup \left\{ -\frac{e}{s} \mid (\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle + s \cdot \varepsilon \geq b) \in \mathbf{C}_1, \mathbf{a} \neq \mathbf{0} \right\},$$

abbiamo che $e_0 > 0$ e $(\mathbf{p}^T, e_0)^T$ verifica tutti i vincoli di \mathbf{C}_1 , $(\mathbf{p}^T, e_0)^T \in \mathcal{Q}_1$ e quindi $\mathbf{p} \in \llbracket \mathcal{Q}_1 \rrbracket$. \square

Lemma 5.8 *Sia $\mathbf{G} = (L, R, V)$ tale che $\mathcal{Q}(\mathbf{G}) \rightrightarrows_{\epsilon} \mathcal{P}$ con $\mathcal{P} \neq \emptyset$. Allora, per ogni $(\mathbf{l}^T, e_l)^T \in L$ e $(\mathbf{r}^T, e_r)^T \in R$, si ha $e_l = e_r = 0$.*

DIMOSTRAZIONE: È sufficiente dimostrare questo lemma nel caso dei raggi: infatti, esiste una retta di direzione \mathbf{l} se nel poliedro si possono individuare due raggi uno di direzione \mathbf{l} e l'altro di direzione $-\mathbf{l}$ e quindi se il lemma vale per i raggi, allora è valido anche per le rette.

Per assurdo supponiamo di considerare $(\mathbf{r}^T, e)^T \in R$ con $e \neq 0$. Dal momento che \mathcal{Q} è una ε -rappresentazione, per la condizione (5.2) esiste $\delta > 0$ tale che per ogni punto $(\mathbf{x}^T, \varepsilon)^T \in \mathcal{Q}$, $0 \leq \varepsilon \leq \delta$. Poiché $\mathcal{Q} \neq \emptyset$, esiste un $(\mathbf{v}^T, e_0)^T \in \mathcal{Q}$ per qualche $0 \leq e_0 \leq \delta$. Quindi, per ogni $\mu \in \mathbb{R}_+$,

$$(\mathbf{v}_\mu^T, e_\mu)^T \stackrel{\text{def}}{=} \mu(\mathbf{r}^T, e)^T + (\mathbf{v}^T, e_0)^T \in \mathcal{Q}.$$

Se $e < 0$, prendendo $\mu > -\frac{e_0}{e} \in \mathbb{R}_+$, otteniamo $e_\mu < 0$. In modo analogo, se $e > 0$, prendendo $\mu \geq \frac{\delta}{e} \in \mathbb{R}_+$, otteniamo $e_\mu \geq e_0 + \delta > \delta$. Così, in entrambi i casi arriviamo ad un assurdo e quindi e deve essere nullo. \square

Lemma 5.9 *Sia $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro NNC e sia \mathbf{G}_1 un sistema di generatori di \mathbb{R}^n tale che $\mathcal{Q}_1(\mathbf{G}_1) \rightrightarrows_{\epsilon} \mathcal{P}$. Allora esiste un sistema di generatori \mathbf{G} tale che $\mathcal{Q}(\text{gen_repr}(\mathbf{G})) \rightrightarrows_{\epsilon} \mathcal{P}$.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $\mathbf{G}_1 = (L_1, R_1, V_1)$ e $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_1(\mathbf{G}_1)$. Consideriamo il sistema di generatori esteso $\mathbf{G} = (L, R, V, C)$ tale che

$$\begin{aligned} L &= \{ \mathbf{l} \in \mathbb{R}^n \mid (\mathbf{l}^T, 0)^T \in L_1 \}, \\ R &= \{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n \mid (\mathbf{r}^T, 0)^T \in R_1 \}, \\ V &= \{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid (\mathbf{v}^T, e)^T \in V_1, e > 0 \}, \\ C &= \{ \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n \mid (\mathbf{c}^T, e)^T \in V_1, e = 0 \}. \end{aligned}$$

Sia $\mathbf{G}_2 = \text{gen_repr}(\mathbf{G}) = (L_2, R_2, V_2)$ e $\mathcal{Q}_2 = \mathcal{Q}_2(\mathbf{G}_2)$; per la definizione di gen_repr e per il Lemma 5.8, abbiamo che $L_2 = L_1$ e $R_2 = R_1$ e

$$V_2 = \{ (\mathbf{v}^T, 1)^T \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (\mathbf{v}^T, e)^T \in V_1, e > 0 \} \\ \cup \{ (\mathbf{v}^T, 0)^T \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (\mathbf{v}^T, e)^T \in V_1 \}.$$

Siano h, k, ℓ e m la cardinalità degli insiemi L_1, R_1, V_1 e V_2 , rispettivamente.

Per la Proposizione 5.6, \mathcal{Q}_2 soddisfa le condizioni (5.2) e (5.3). Dobbiamo solo dimostrare che $[\mathcal{Q}_1] = [\mathcal{Q}_2]$.

Sia $\mathbf{p} \in [\mathcal{Q}_1]$: esiste un $e > 0$ tale che $(\mathbf{p}^T, e)^T \in \mathcal{Q}_1$ e quindi un $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^h$, un $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}_+^k$, un $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}_+^\ell$, con $\sum_{i=1}^\ell \nu_i = 1$, tali che

$$(\mathbf{p}^T, e)^T = \sum_{\mathbf{l}_i \in L_1} \lambda_i \mathbf{l}_i + \sum_{\mathbf{r}_i \in R_1} \mu_i \mathbf{r}_i + \sum_{\mathbf{v}_i \in V_1} \nu_i \mathbf{v}_i.$$

Per la definizione di V_2 , abbiamo che per ogni $(\mathbf{v}_i^T, e_i)^T \in V_1$ tale che $e_i > 0$ (o $e_i = 0$) esiste un $(\mathbf{v}_i^T, e'_i)^T \in V_2$ tale che $e'_i > 0$ (o $e'_i = 0$). Inoltre, esiste anche $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}_+^m$, con $\sum_{i=1}^m \eta_i = 1$, tale che

$$(\mathbf{p}^T, e')^T = \sum_{\mathbf{l}_i \in L_1} \lambda_i \mathbf{l}_i + \sum_{\mathbf{r}_i \in R_1} \mu_i \mathbf{r}_i + \sum_{\mathbf{v}_i \in V_2} \eta_i \mathbf{v}_i,$$

con $e' > 0$. Quindi $(\mathbf{p}^T, e')^T \in \mathcal{Q}_2$ e $\mathbf{p} \in [\mathcal{Q}_2]$.

L'inclusione opposta si dimostra in modo simmetrico. \square

Teorema 5.10 *L'insieme $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbf{C})$ è un poliedro NNC di \mathbb{R}^n se e solo se*

$$\mathcal{P} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} \mathbf{x} = \sum_{k \in K} \lambda_k \mathbf{l}_k + \sum_{h \in H} \mu_h \mathbf{r}_h + \sum_{i \in I} \nu_i \mathbf{v}_i + \sum_{j \in J} \eta_j \mathbf{c}_j, \\ \text{con } \lambda_k \in \mathbb{R}, \mu_h, \nu_i, \eta_j \in \mathbb{R}_+, \boldsymbol{\nu} \neq \mathbf{0}, \sum_{i \in I} \nu_i + \sum_{j \in J} \eta_j = 1 \end{array} \right. \right\}.$$

DIMOSTRAZIONE: Sia $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro NNC descritto da un sistema \mathbf{C} di vincoli: dobbiamo dimostrare che esiste un sistema di generatori $\mathbf{G} = (L, R, V, C)$ tale che $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbf{G})$. Se $\mathcal{P} = \emptyset$, allora è sufficiente scegliere $L = R = V = C = \emptyset$. Supponiamo ora che $\mathcal{P} \neq \emptyset$. Per la Proposizione 5.6, esiste un poliedro chiuso \mathcal{Q} di \mathbb{R}^{n+1} tale che $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\text{con_repr}(\mathbf{C}))$. Applicando il Teorema 3.57 al poliedro \mathcal{Q} si ottiene che questo si può esprimere tramite un sistema di generatori $\mathbf{G}' = (L', R', V')$ e che quindi $\mathcal{Q}(\mathbf{G}') \cong_\epsilon \mathcal{P}$. La tesi deriva direttamente dal Lemma 5.9.

Viceversa, consideriamo un sistema di generatori esteso $\mathbf{G} = (L, R, V, C)$ e mostriamo che $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbf{G})$ è un poliedro NNC. Se $V = \emptyset$, allora $\mathcal{P} = \emptyset$ e l'insieme vuoto è un poliedro NNC. Supponiamo ora che $V \neq \emptyset$ e quindi

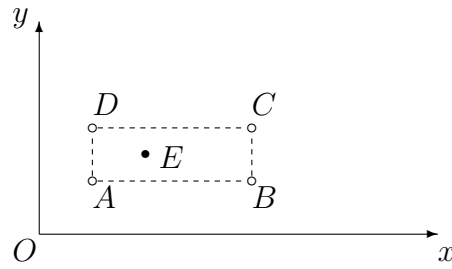


Figura 5.2: Rettangolo aperto.

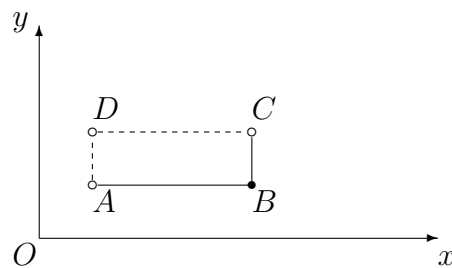


Figura 5.3: Esempio di un poliedro NNC.

$\mathcal{P} \neq \emptyset$. Sia allora $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\text{gen_repr}(\mathbf{G}))$: per la Proposizione 5.6, $\mathcal{Q} \Rightarrow_{\epsilon} \mathcal{P}$. Per il Teorema 3.60, esiste un sistema di vincoli \mathbf{C} formato da equazioni e disequazioni non-strette tale che $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\mathbf{C})$. Allora per il Lemma 5.8 si ha la tesi. \square

Esempio 5.11 Consideriamo il poliedro NNC $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^2$ della Figura 5.2. Per poterlo descrivere è necessario considerare i punti di chiusura A , B , C e D e un punto di \mathcal{P} , ad esempio E . Se, invece, consideriamo il poliedro NNC $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^2$ della Figura 5.3, per descriverlo è necessario usare i punti di chiusura A , C e D e il punto B .

5.3 Sistemi minimali

Come abbiamo fatto per i poliedri chiusi, possiamo definire il concetto di sistema minimale nel caso di poliedri NNC. Inizialmente si può supporre di considerare come sistema minimale del poliedro NNC un sistema minimale del poliedro rappresentazione. Intuitivamente si osserva che questa scelta, però, non è quella corretta, in quanto nel sistema della rappresentazione possono essere contenuti vincoli (o generatori) che sono ridondanti per il poliedro NNC. Introduremo quindi il nuovo concetto di sistemi *in forma*

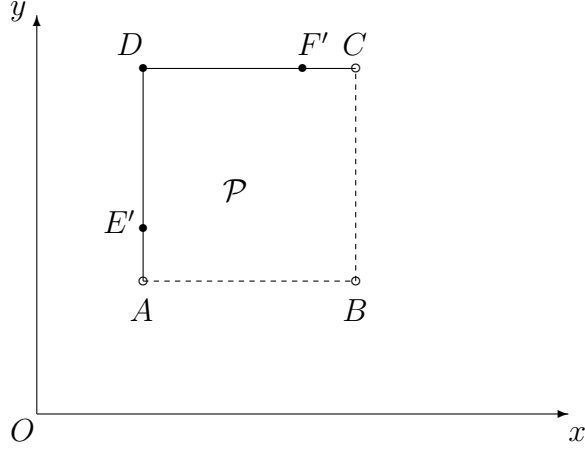


Figura 5.4: Poliedro descritto nell'Esempio 5.12.

minimale forte, cioè di sistemi che sono in forma minimale per il poliedro NNC.

Esempio 5.12 Consideriamo per esempio il poliedro $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^2$ descritto dal seguente sistema di vincoli

$$\begin{cases} 2 \leq x < 6 \\ 2 < y \leq 6 \end{cases}$$

e che è rappresentato in Figura 5.4. Applicando l'algoritmo di Chernikova al poliedro chiuso corrispondente otteniamo che il poliedro \mathcal{P} è descritto da un sistema di generatori formato da tre punti di chiusura $A = (2, 0)$, $B = (2, 6)$ e $C = (6, 6)$ e da tre punti $D' = (6, 2)$, $E' = (2, 3)$ e $F' = (5, 2)$. Si osserva che questa rappresentazione non è minimale per il poliedro \mathcal{P} in quanto i punti E' ed F' possono essere ottenuti come combinazione convessa del punto D e dei punti di chiusura A e C , rispettivamente.

Sia $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\mathbf{G}) = \mathcal{Q}(\mathbf{C})$ un poliedro chiuso di \mathbb{R}^{n+1} tale che $\mathcal{Q} \Rightarrow_{\epsilon} \mathcal{P}$, con \mathcal{P} un poliedro NNC di \mathbb{R}^n . Indichiamo con $\mathbf{C}_{=}$, $\mathbf{C}_{>}$ e \mathbf{C}_{\geq} i sottoinsiemi di \mathbf{C} composti rispettivamente dalle equazioni, dalle disequazioni strette e da quelle non-strette, cioè

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{=} &= \left\{ (\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle + s \cdot \varepsilon = b) \in \mathbf{C} \mid \mathbf{a} \neq \mathbf{0}, s = 0 \right\}; \\ \mathbf{C}_{>} &= \left\{ (\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle + s \cdot \varepsilon \geq b) \in \mathbf{C} \mid \mathbf{a} \neq \mathbf{0}, s < 0 \right\}; \\ \mathbf{C}_{\geq} &= \left\{ (\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle + s \cdot \varepsilon \geq b) \in \mathbf{C} \mid \mathbf{a} \neq \mathbf{0}, s = 0 \right\}; \end{aligned}$$

inoltre, indichiamo con \mathbf{C}_ε l'insieme $\left\{ (\varepsilon \leq \delta) \in \mathbf{C} \mid \delta > 0 \right\}$.

In modo analogo, indichiamo con \mathbf{G}_C un insieme che contiene un numero finito di punti di chiusura di \mathcal{P} , con \mathbf{G}_V un insieme finito di punti di \mathcal{P} e con $\mathbf{G}_U \subseteq \mathbf{G}_V$ un insieme di punti di \mathcal{P} che non sono *accoppiati* con punti di chiusura. Cioè, se $\mathbf{G} = (L, R, V)$ è il sistema di generatori che definisce \mathcal{Q} , allora

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_C &= \{ (\mathbf{v}^T, e)^T \in V \mid e = 0 \}; \\ \mathbf{G}_V &= \{ (\mathbf{v}^T, e)^T \in V \mid e > 0 \}; \\ \mathbf{G}_U &= \{ (\mathbf{v}^T, e)^T \in V \mid e > 0, (\mathbf{v}^T, 0)^T \notin V \}.\end{aligned}$$

Definizione 5.13 (Forma minimale forte) *Sia $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\mathbf{G}) = \mathcal{Q}(\mathbf{C})$ tale che $\mathcal{Q} \Rightarrow_\varepsilon \mathcal{P}$. Allora*

- \mathbf{C} è in forma minimale forte se \mathbf{C} è un sistema minimale e non esiste un sistema di vincoli \mathbf{C}' tale che $(\mathbf{C}'_{=} \cup \mathbf{C}'_{>} \cup \mathbf{C}'_{\geq}) \subset (\mathbf{C}_{=} \cup \mathbf{C}_{>} \cup \mathbf{C}_{\geq})$ e $\mathcal{Q}'(\mathbf{C}') \Rightarrow_\varepsilon \mathcal{P}$;
- $\mathbf{G} = (L, R, V)$ è in forma minimale forte se \mathbf{G} è un sistema di generatori minimale e non esiste $\mathbf{G}' = (L', R', V') \neq \mathbf{G}$ tale che $L' \subseteq L$, $R' \subseteq R$ e $V' \subseteq V$ e $\mathcal{Q}'(\mathbf{G}') \Rightarrow_\varepsilon \mathcal{P}$.

Per poter individuare la rappresentazione in forma minimale forte dei sistemi che definiscono i poliedri è necessario introdurre la seguente definizione.

Definizione 5.14 (ε -ridondanza) *Sia $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\mathbf{G}) = \mathcal{Q}(\mathbf{C})$ un poliedro chiuso di \mathbb{R}^{n+1} tale che $\mathcal{Q} \Rightarrow_\varepsilon \mathcal{P}$. Un vincolo c è ε -ridondante in \mathbf{C} se $c \in \mathbf{C}_{>}$ e vale almeno una delle seguenti condizioni:*

$$\begin{aligned}S(c, \mathbf{G}) \cap \mathbf{G}_C &= \emptyset; \\ \exists c' \in \mathbf{C}_{>} \setminus \{c\} . S(c, \mathbf{G}) \setminus \mathbf{G}_V &\subseteq S(c', \mathbf{G}).\end{aligned}$$

Un generatore \mathbf{p} è ε -ridondante se $\mathbf{p} \in \mathbf{G}_U$ e

$$\exists \mathbf{p}' \in \mathbf{G}_V \setminus \{\mathbf{p}\} . S(\mathbf{p}, \mathbf{C}) \cap \mathbf{C}_{\geq} \subseteq S(\mathbf{p}', \mathbf{C}).$$

La definizione di vincoli o generatori ε -ridondanti permette di caratterizzare gli elementi dei sistemi che sono in forma minimale forte.

Teorema 5.15 *Sia $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\mathbf{C}) = \mathcal{Q}(\mathbf{G})$ un poliedro chiuso di \mathbb{R}^n tale che $\mathcal{Q} \Rightarrow_\varepsilon \mathcal{P} \neq \emptyset$ e siano \mathbf{C} e \mathbf{G} sistemi minimali. Allora valgono le seguenti condizioni:*

1. se c è ε -ridondante in \mathbf{C} , allora $\mathcal{Q}'(\mathbf{C} \setminus \{c\} \cup \{\varepsilon \leq 1\}) \Rightarrow_{\varepsilon} \mathcal{P}$;
2. se \mathbf{p} è ε -ridondante in $\mathbf{G} = (L, R, V)$, allora $\mathcal{Q}'((L, R, V \setminus \{\mathbf{p}\})) \Rightarrow_{\varepsilon} \mathcal{P}$;
3. se \mathbf{C} non contiene vincoli ε -ridondanti, allora \mathbf{C} è in forma minimale forte;
4. se \mathbf{G} non contiene generatori ε -ridondanti, allora \mathbf{G} è in forma minimale forte.

Di seguito, dimostreremo una proposizione per ognuna delle affermazioni del Teorema 5.15. Per semplificare le dimostrazioni di queste proposizioni premettiamo alcuni lemmi tecnici.

Lemma 5.16 *Sia $\mathcal{Q}(\mathbf{C}) \Rightarrow_{\varepsilon} \mathcal{P}$. Se esiste un vincolo $c \in \mathbf{C}$ della forma $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle + s \cdot \varepsilon \geq b$ che è saturato da $(\mathbf{v}^T, e)^T \in \mathcal{Q}$, con $e \neq 0$, allora $s \leq 0$.*

DIMOSTRAZIONE: Dal momento che $(\mathbf{v}^T, e)^T \in \mathcal{Q}$ satura c , allora $\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle + s \cdot e = b$. Per la condizione (5.3), si ha $(\mathbf{v}^T, 0)^T \in \mathcal{Q}$ e $\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle \geq b$. Inoltre, per la (5.2), $e \geq 0$. Per ipotesi sappiamo che $e \neq 0$ e ciò implica $s \leq 0$. \square

Lemma 5.17 *Sia $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\mathbf{G}) = \mathcal{Q}(\mathbf{C})$ un poliedro chiuso di \mathbb{R}^{n+1} tale che $\mathcal{Q} \Rightarrow_{\varepsilon} \mathcal{P} \neq \emptyset$ e $\mathbf{G} = (L, R, V)$. Allora, esiste un vincolo $c^* \in \mathbf{C} \setminus (\mathbf{C}_= \cup \mathbf{C}_> \cup \mathbf{C}_{\geq} \cup \mathbf{C}_{\varepsilon})$ tale che $S(c^*, \mathbf{G}) = L \cup R \cup \mathbf{G}_C$. Inoltre, se \mathbf{C} e \mathbf{G} sono in forma minimale, valgono le seguenti proprietà:*

1. $\{c^*\} = \mathbf{C} \setminus (\mathbf{C}_= \cup \mathbf{C}_> \cup \mathbf{C}_{\geq} \cup \mathbf{C}_{\varepsilon})$;
2. se consideriamo $\mathbf{p} = (\mathbf{v}^T, e)^T \in \mathcal{Q}$, con $e > 0$ e $\mathbf{p}_0 = (\mathbf{v}^T, 0)^T$, allora si ha $S(\mathbf{p}_0, \mathbf{C}) \setminus \{c^*\} = S(\mathbf{p}, \mathbf{C}) \cap (\mathbf{C}_{\geq} \cup \mathbf{C}_=)$;
3. per ogni $c \in \mathbf{C} \setminus \{c^*\}$, $S(c, \mathbf{G}) \cap \mathbf{G}_V \neq \emptyset$.

DIMOSTRAZIONE: Per l'ipotesi che $\mathcal{P} \neq \emptyset$ e per le condizioni (5.3) e (5.4), esiste un punto $(\mathbf{v}^T, 0)^T \in \mathcal{Q}$. Inoltre, per la condizione (5.2) esiste un vincolo c^* della forma $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle + s \cdot \varepsilon \geq b$ tale che ogni punto della forma $(\mathbf{v}^T, e)^T$, con $e < 0$ non lo soddisfa. Ciò significa che per ogni $e < 0$ otteniamo $\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle + s \cdot e < b$ e dal momento che il punto $(\mathbf{v}^T, 0)^T$ soddisfa c^* abbiamo che $\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle \geq b$. Da questo segue che $\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle = b$ e $s > 0$: ciò dimostra che $c^* \in \mathbf{C} \setminus (\mathbf{C}_= \cup \mathbf{C}_> \cup \mathbf{C}_{\geq} \cup \mathbf{C}_{\varepsilon})$. Inoltre, dal momento che $s > 0$, ogni punto $(\mathbf{q}^T, e)^T$ satura c^* se e solo se $e = 0$. Quindi per il Lemma 5.8, $L \cup R \subseteq S(c^*, \mathbf{G})$ e si ha $L \cup R \cup \mathbf{G}_C = S(c^*, \mathbf{G})$.

Ora supponiamo che \mathbf{C} e \mathbf{G} siano sistemi minimali. Si può osservare che $\mathcal{P} \neq \emptyset$ implica che $\mathbf{G}_V \neq \emptyset$ e quindi $(L, R, \mathbf{G}_C) \neq \mathbf{G}$. Dal momento che la condizione $L \cup R \cup \mathbf{G}_C = S(c^*, \mathbf{G})$ vale per ogni vincolo $c^* \in \mathbf{C} \setminus (\mathbf{C}_= \cup \mathbf{C}_> \cup \mathbf{C}_\geq \cup \mathbf{C}_\varepsilon)$ e \mathbf{C} è in forma minimale, allora vi è solo un vincolo con queste proprietà e quindi $\{c^*\} = \mathbf{C} \setminus (\mathbf{C}_= \cup \mathbf{C}_> \cup \mathbf{C}_\geq \cup \mathbf{C}_\varepsilon)$.

Consideriamo $c \in \mathbf{C}_\geq \cup \mathbf{C}_=$; $c \in S(\mathbf{p}, \mathbf{C})$ se e solo se $c \in S(\mathbf{p}_0, \mathbf{C})$ e quindi $S(\mathbf{p}, \mathbf{C}_\geq) = S(\mathbf{p}_0, \mathbf{C}_\geq)$, perché ogni punto satura tutte le equazioni che descrivono il poliedro a cui appartiene. Supponiamo ora $c \in \mathbf{C}_>$, cioè c è della forma $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle + s \cdot \varepsilon \geq b$ con $s < 0$; poiché $\varepsilon > 0$, otteniamo che $\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle > b$ e quindi \mathbf{p}_0 soddisfa, ma non satura c . Quindi $S(\mathbf{p}_0, \mathbf{C}_>) = \emptyset$. Da quello che abbiamo appena osservato, si ottiene

$$\begin{aligned} S(\mathbf{p}_0, \mathbf{C}) \setminus \{c^*\} &= S(\mathbf{p}_0, \mathbf{C}) \cap (\mathbf{C}_= \cup \mathbf{C}_> \cup \mathbf{C}_\geq \cup \mathbf{C}_\varepsilon) \\ &= S(\mathbf{p}_0, \mathbf{C}_=) \cup S(\mathbf{p}_0, \mathbf{C}_>) \cup S(\mathbf{p}_0, \mathbf{C}_\geq) \cup S(\mathbf{p}_0, \mathbf{C}_\varepsilon) \\ &= S(\mathbf{p}, \mathbf{C}) \cap (\mathbf{C}_\geq \cup \mathbf{C}_=). \end{aligned}$$

Infine, consideriamo $c \in \mathbf{C} \setminus \{c^*\}$. Allora, poiché \mathbf{C} e \mathbf{G} sono in forma minimale, $S(c, \mathbf{G}) \setminus (L \cup R \cup \mathbf{G}_C) \neq \emptyset$. Abbiamo perciò dimostrato che esiste un punto $\mathbf{p} \in \mathbf{G}_V$ tale che $\mathbf{p} \in S(c, \mathbf{G})$. \square

Lemma 5.18 *Se $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ è un poliedro NNC non vuoto e $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ è un poliedro chiuso tale che $\mathcal{Q} \rightrightarrows_\varepsilon \mathcal{P}$, allora*

$$\mathbb{C}(\mathcal{P}) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\mathbf{x}^T, 0)^T \in \mathcal{Q} \}.$$

DIMOSTRAZIONE: Sia $\mathcal{P}' = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\mathbf{x}^T, 0)^T \in \mathcal{Q} \}$: dobbiamo dimostrare che $\mathbb{C}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}'$.

Sia $\mathbf{x} \in \mathcal{P}'$: allora $(\mathbf{x}^T, 0)^T \in \mathcal{Q}$. Consideriamo $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ e osserviamo che per la condizione (5.4), esiste un $\varepsilon > 0$ tale che $(\mathbf{p}^T, \varepsilon)^T \in \mathcal{Q}$. Per ogni $0 < \lambda < 1$, possiamo scrivere che

$$\lambda(\mathbf{p}^T, \varepsilon)^T + (1 - \lambda)(\mathbf{x}^T, 0)^T = (\lambda\mathbf{p}^T + (1 - \lambda)\mathbf{x}^T, \lambda\varepsilon) \in \mathcal{Q}.$$

Per la condizione (5.4) e poiché $\lambda\varepsilon > 0$, abbiamo che $\lambda\mathbf{p}^T + (1 - \lambda)\mathbf{x}^T \in \mathcal{P}$. Infine, poiché $\mathcal{P} \neq \emptyset$, possiamo applicare la Proposizione 5.4 e ottenere che $\mathbf{x} \in \mathbb{C}(\mathcal{P})$.

Viceversa, supponiamo che $\mathbf{x} \in \mathbb{C}(\mathcal{P})$. Per ogni $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$ abbiamo che $\lambda_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n}$, $0 < \lambda_n < 1$ e, per la Proposizione 5.4,

$$\mathbf{v}_n \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_n \mathbf{p} + (1 - \lambda_n) \mathbf{x} \in \mathcal{P}.$$

Inoltre, poiché $\mathcal{Q} \rightrightarrows_\varepsilon \mathcal{P}$, per la condizione (5.4) e quindi per la (5.3), abbiamo che $(\mathbf{v}_n^T, 0)^T \in \mathcal{Q}$. Se $\mathbf{p} = \mathbf{x}$, allora $\mathbf{v}_n = \mathbf{x}$ e quindi la tesi. Se, invece, $\mathbf{p} \neq \mathbf{x}$,

per ogni intorno circolare centrato in $(\mathbf{x}^T, 0)^T$ e di raggio $\delta > 0$, esiste un $m \in \mathbb{N}$ tale che $\lambda_m < \delta$; in questo modo $(\mathbf{v}_m^T, 0)^T \in \mathcal{Q}$ appartiene all'intorno circolare e quindi $(\mathbf{x}^T, 0)^T \in \mathbb{C}(\mathcal{Q})$. Abbiamo che $\mathbf{x} \in \mathcal{P}'$, perché $\mathcal{Q} = \mathbb{C}(\mathcal{Q})$ e quindi $(\mathbf{x}^T, 0)^T \in \mathcal{Q}$. \square

Proposizione 5.19 *Sia $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\mathbf{G}) = \mathcal{Q}(\mathbf{C})$ un poliedro chiuso di \mathbb{R}^{n+1} tale che $\mathcal{Q} \Rightarrow_\epsilon \mathcal{P} \neq \emptyset$ e siano \mathbf{C} e \mathbf{G} sistemi minimali.*

Se $c \in \mathbf{C}$ è ϵ -ridondante, allora $\mathcal{Q}'(\mathbf{C} \setminus \{c\} \cup \{\epsilon \leq 1\}) \Rightarrow_\epsilon \mathcal{P}$.

DIMOSTRAZIONE: Sia $\mathbf{C}' = \mathbf{C} \setminus \{c\} \cup \{\epsilon \leq 1\}$ e sia $c \in \mathbf{C}$ un vincolo ϵ -ridondante. Allora per la Definizione 5.14, $c \in \mathbf{C}_>$: ciò significa che c è della forma $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle + s \cdot \epsilon \geq b$, con $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $s, b \in \mathbb{R}$ e $s < 0$. Indichiamo con \mathcal{Q}' il poliedro descritto dal sistema di vincoli \mathbf{C}' , cioè $\mathcal{Q}' = \mathcal{Q}'(\mathbf{C}')$. Per dimostrare che $\mathcal{Q}' \Rightarrow_\epsilon \mathcal{P}$, dobbiamo per prima cosa verificare che \mathcal{Q}' è una ϵ -rappresentazione.

Consideriamo la condizione (5.2). Si ha che $\mathcal{Q}' \subseteq \{(\mathbf{x}^T, \epsilon)^T \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \epsilon \leq \delta\}$, se consideriamo $\delta = 1$, perché $\epsilon \leq 1$ è esplicitamente aggiunto in \mathbf{C}' . Inoltre, per il Lemma 5.17, esiste un vincolo $c^* \in \mathbf{C} \setminus (\mathbf{C}_= \cup \mathbf{C}_> \cup \mathbf{C}_\geq \cup \mathbf{C}_\epsilon)$ tale che c^* è saturato da tutti i punti $\mathbf{v}_0 = (\mathbf{v}^T, 0)^T \in \mathcal{Q}$. Dal momento che $c \in \mathbf{C}_>$, $c \neq c^*$ e $c^* \in \mathbf{C}'$: si ha perciò che $\mathcal{Q}' \subseteq \{(\mathbf{x}^T, \epsilon)^T \mid \epsilon \geq 0\}$.

Dimostriamo ora la condizione (5.3). Supponiamo per assurdo che esista $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ed $e \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ tale che $(\mathbf{v}^T, e)^T \in \mathcal{Q}'$, ma $(\mathbf{v}^T, 0)^T \notin \mathcal{Q}'$. Come conseguenza, esiste un vincolo $c' \in \mathbf{C}'$ che non è soddisfatto da $(\mathbf{v}^T, 0)^T$: si osserva che c' non può essere un'equazione, perché non verificherebbe le condizioni precedenti. Supponiamo quindi che c' sia della forma $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle + s \cdot \epsilon \geq b$ e che esista un punto $(\mathbf{v}^T, e')^T$, con $0 < e' \leq e$, tale che $\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle + s \cdot e' = b$ e $\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle < b$. Poiché $e' > 0$, questa condizione implica $s > 0$; come conseguenza di ciò, osserviamo che c' non coincide con il vincolo $\epsilon \leq 1$ e quindi $c' \in \mathbf{C}$. Questo contraddice il Lemma 5.16 e perciò $(\mathbf{v}^T, 0)^T \in \mathcal{Q}'$.

Fino a questo punto abbiamo dimostrato che \mathcal{Q}' è una ϵ -rappresentazione: resta solo da dimostrare che è una ϵ -rappresentazione per \mathcal{P} , cioè $\llbracket \mathcal{Q} \rrbracket = \llbracket \mathcal{Q}' \rrbracket$

Per dimostrare $\llbracket \mathcal{Q} \rrbracket \subseteq \llbracket \mathcal{Q}' \rrbracket$, consideriamo $\mathbf{v} \in \llbracket \mathcal{Q} \rrbracket$: esiste un $e > 0$ tale che $(\mathbf{v}^T, e)^T \in \mathcal{Q}$ e per la (5.3), si ha anche $(\mathbf{v}^T, 0)^T \in \mathcal{Q}$. Di conseguenza, esiste $0 < e' < 1$ tale che $(\mathbf{v}^T, e')^T \in \mathcal{Q}$, per la convessità di \mathcal{Q} . Il punto $(\mathbf{v}^T, e')^T$ soddisfa tutti i vincoli di \mathbf{C} e anche $\epsilon \leq 1$: $(\mathbf{v}^T, e')^T$ appartiene perciò anche a \mathcal{Q}' .

Viceversa, supponiamo ora che $\mathbf{v} \in \llbracket \mathcal{Q}' \rrbracket$ e dimostriamo che $\mathbf{v} \in \llbracket \mathcal{Q} \rrbracket$. In modo analogo al caso precedente, si osserva che esiste un $e' > 0$ tale che $(\mathbf{v}^T, e')^T \in \mathcal{Q}'$ e anche $(\mathbf{v}^T, 0)^T \in \mathcal{Q}'$. Sia $\mathbf{G}' = (L', R', V')$ il sistema di generatori tali che $\mathcal{Q}' = \mathcal{Q}'(\mathbf{C}') = \mathcal{Q}'(\mathbf{G}')$. Per il Lemma 5.8 e per la definizione

di punti di chiusura, il punto $(\mathbf{v}^T, 0)^T$ appartiene al poliedro generato dal sistema (L', R', \mathbf{G}_C) .

Dimostriamo che $(\mathbf{v}^T, 0)^T \in \mathcal{Q}$ procedendo per assurdo. Supponiamo che $(\mathbf{v}^T, 0)^T \notin \mathcal{Q}$: allora c non è soddisfatto da $(\mathbf{v}^T, 0)^T$ e cioè $\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle < b$. Allora per il Lemma 5.17, esiste un punto $(\mathbf{p}^T, e_p)^T \in \mathbf{G}_V$ che satura c . Poiché $e_p > 0$ e $s < 0$, otteniamo $\langle \mathbf{a}, \mathbf{p} \rangle > b$: quindi esiste $0 < \lambda < 1$ tale che, se definiamo $\mathbf{q} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \mathbf{v} + (1 - \lambda) \mathbf{p}$, allora $\langle \mathbf{a}, \mathbf{q} \rangle = b$ e quindi $(\mathbf{q}^T, 0)^T$ satura il vincolo c . Osserviamo che $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ e quindi $\mathbf{p} \in \mathbb{C}(\mathcal{P})$. Dal momento che $\mathcal{P} = \llbracket \mathcal{Q} \rrbracket \subseteq \llbracket \mathcal{Q}' \rrbracket$, otteniamo che $\mathbf{p} \in \mathbb{C}(\llbracket \mathcal{Q}' \rrbracket)$: per il Lemma 5.18, si ottiene che $(\mathbf{p}^T, 0)^T \in \mathcal{Q}'$. Per il fatto che $(\mathbf{q}^T, 0)^T$ è definito come combinazione convessa di due punti di \mathcal{Q}' , allora anche $(\mathbf{q}^T, 0)^T$ appartiene a \mathcal{Q}' : $(\mathbf{q}^T, 0)^T$ satura c e quindi appartiene a $\mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}'$. Osserviamo che questo implica che $S(c, \mathbf{G}) \cap \mathbf{G}_C \neq \emptyset$ e quindi, per l'ipotesi che c sia ε -ridondante in \mathbf{C} , esiste un vincolo $c' \in \mathbf{C}_> \setminus \{c\}$ tale che $S(c, \mathbf{G}) \setminus \mathbf{G}_V \subseteq S(c', \mathbf{G})$. Sia allora c' della forma $\langle \mathbf{a}', \mathbf{x} \rangle + s' \cdot \varepsilon \geq b'$, dove $\mathbf{a}' \neq \mathbf{0}$ e $s' < 0$. Poiché $c' \in \mathbf{C}'$, il punto $(\mathbf{v}^T, e')^T \in \mathcal{Q}'$ soddisfa c' . Inoltre, dal momento che $s' < 0$ ed $e' > 0$, otteniamo $\langle \mathbf{a}', \mathbf{v} \rangle > b'$, cioè $(\mathbf{v}^T, 0)^T$ soddisfa c' . In modo analogo, il punto $(\mathbf{p}^T, 0)^T \in \mathcal{Q}'$ deve verificare c' e quindi $\langle \mathbf{a}', \mathbf{p} \rangle \geq b'$. Poiché $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$, la condizione precedente implica che $\langle \mathbf{a}', \mathbf{q} \rangle > b'$, da cui $(\mathbf{q}^T, 0)^T$ satura c e non c' . Comunque, $(\mathbf{q}^T, 0)^T \in \mathcal{Q}$ si può scrivere come somma di una combinazione lineare di rette, di una combinazione positiva di raggi e punti di \mathbf{G}_C che saturano c . Inoltre, $(\mathbf{q}^T, 0)^T \in \mathcal{Q}$ si può scrivere come somma di una combinazione lineare di rette, di una combinazione positiva di raggi e punti di \mathbf{G}_C che saturano c' . Si osserva che $(\mathbf{q}^T, 0)^T$ deve saturare c' e ciò conduce ad un assurdo. Quindi abbiamo che $(\mathbf{v}^T, 0)^T$ appartiene a \mathcal{Q} .

Ora dimostriamo che $(\mathbf{v}^T, e)^T$ appartiene a \mathcal{Q} procedendo per assurdo. Supponiamo che $(\mathbf{v}^T, e)^T \notin \mathcal{Q}$ per ogni $e > 0$, cioè $\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle + s \cdot e < b$. Poiché, $(\mathbf{v}^T, 0)^T$ soddisfa il vincolo c , deve accadere che $\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle = b$, cioè $(\mathbf{v}^T, 0)^T$ satura c . Ciò implica che $(\mathbf{v}^T, 0)^T$ appartiene al poliedro descritto dal sistema di generatori (L, R_c, V_c) , dove $R_c = R \cap S(c, \mathbf{G})$ e $V_c = \mathbf{G}_C \cap S(c, \mathbf{G})$. Si osserva che non può accadere che $S(c, \mathbf{G}) \cap \mathbf{G}_C = \emptyset$ e, poiché c è ε -ridondante, esiste un vincolo $c' \in \mathbf{C}$ diverso da c tale che $S(c, \mathbf{G}) \setminus \mathbf{G}_V \subseteq S(c', \mathbf{G})$. Si può osservare che $L \cup R_c \cup V_c \subseteq S(c, \mathbf{G}) \setminus \mathbf{G}_V$ e così anche $(\mathbf{v}^T, 0)^T$ satura c' . Poiché $c' \in \mathbf{C}'$, questo implica che per ogni $e > 0$ il punto $(\mathbf{v}^T, e)^T \notin \mathcal{Q}'$, da cui l'assurdo perché avevamo supposto che $\mathbf{v} \in \llbracket \mathcal{Q}' \rrbracket$. Di conseguenza, esiste un $e > 0$ tale che $(\mathbf{v}^T, e)^T \in \mathcal{Q}$ e per definizione $\mathbf{v} \in \llbracket \mathcal{Q} \rrbracket$. \square

Proposizione 5.20 *Sia $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\mathbf{G}) = \mathcal{Q}(\mathbf{C})$ un poliedro chiuso di \mathbb{R}^{n+1} tale che $\mathcal{Q} \cong_\varepsilon \mathcal{P} \neq \emptyset$ e siano \mathbf{C} e \mathbf{G} sistemi minimali. Se $\mathbf{p} \in V$ è ε -ridondante in $\mathbf{G} = (L, R, V)$, allora $\mathcal{Q}'((L, R, V \setminus \{\mathbf{p}\})) \cong_\varepsilon \mathcal{P}$.*

DIMOSTRAZIONE: Per la Definizione 5.14, $\mathbf{p} \in \mathbf{G}_U$ ed esiste $e > 0$ tale che $\mathbf{p} = (\mathbf{v}^T, e)^T \in V$ e $\mathbf{p}_0 = (\mathbf{v}^T, 0)^T \notin V$. Indichiamo con \mathbf{G}' il sistema $(L, R, V \setminus \{\mathbf{p}\})$ che genera \mathcal{Q}' . Per la monotonia della costruzione di un poliedro a partire da un sistema di generatori, si ha $\mathcal{Q}' \subseteq \mathcal{Q}$. Per ogni $\mathbf{q}_0 = (\mathbf{t}^T, 0)^T$, $\mathbf{q}_0 \in \mathcal{Q}$ se e solo se $\mathbf{q}_0 \in \mathcal{Q}'$. Per dimostrare questo, è sufficiente osservare che, dal momento che $\mathbf{G}_C = \mathbf{G}'_C$ (perché $\mathbf{p} \notin \mathbf{G}_C$), $\mathbf{q}_0 \in \mathcal{Q}$ se e solo se \mathbf{q}_0 appartiene al poliedro generato dal sistema (L, R, \mathbf{G}_C) se e solo se $\mathbf{q}_0 \in \mathcal{Q}'$.

Ora dobbiamo dimostrare che $\mathcal{Q}' \Rightarrow_\varepsilon \mathcal{P}$: per prima cosa verifichiamo che \mathcal{Q}' è una ε -rappresentazione. Vale la condizione (5.2), perché $\mathcal{Q}' \subseteq \mathcal{Q}$ ed è sufficiente perciò scegliere lo stesso valore di δ scelto per \mathcal{Q} .

Consideriamo ora la condizione (5.3) e $\mathbf{q} = (\mathbf{t}^T, e_t)^T \in \mathcal{Q}'$. Si ha $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$, perché $\mathcal{Q}' \subseteq \mathcal{Q}$; inoltre, si ha $\mathbf{q}_0 = (\mathbf{t}^T, 0)^T \in \mathcal{Q}$, perché \mathcal{Q} è una ε -rappresentazione. Quindi, per l'osservazione fatta precedentemente, $\mathbf{q}_0 \in \mathcal{Q}'$.

Ora dimostriamo che \mathcal{Q}' è una ε -rappresentazione per \mathcal{P} , e cioè che $[\mathcal{Q}] = [\mathcal{Q}']$. Per la monotonia di $[\cdot]$, si ha $[\mathcal{Q}'] \subseteq [\mathcal{Q}]$, perché $\mathcal{Q}' \subseteq \mathcal{Q}$.

Per dimostrare $[\mathcal{Q}] \subseteq [\mathcal{Q}']$ supponiamo che $\mathbf{t} \in [\mathcal{Q}]$. Allora esiste $e > 0$ tale che $\mathbf{q} = (\mathbf{t}^T, e)^T \in \mathcal{Q}$. Per la condizione (5.3), $\mathbf{q}_0 = (\mathbf{t}^T, 0)^T \in \mathcal{Q}$. Il punto \mathbf{q}_0 appartiene al poliedro descritto dal sistema di generatori (L, R, \mathbf{G}_C) ; abbiamo che $\mathbf{G}_C = \mathbf{G}'_C$, perché $\mathbf{p} \notin \mathbf{G}_C$, da cui $\mathbf{q}_0 \in \mathcal{Q}'$. Dal momento che $\mathbf{q}_0 \in \mathcal{Q}$, esiste $0 \leq \lambda_p \leq 1$ e $\mathbf{p}_1 \in \mathcal{Q}'$ tale che $\mathbf{q} = \lambda_p \mathbf{p} + (1 - \lambda_p) \mathbf{p}_1$. Se $\lambda_p = 0$, allora $\mathbf{q} = \mathbf{p}_1$ e $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}'$, da cui $\mathbf{t} \in [\mathcal{Q}']$.

Supponiamo allora che $\lambda_p > 0$: allora $S(\mathbf{q}, \mathbf{C}) \subseteq S(\mathbf{p}, \mathbf{C})$. Per l'ipotesi che \mathbf{p} è ε -ridondante, esiste $\mathbf{p}' = (\mathbf{y}^T, e')^T \in V \setminus \{\mathbf{p}\}$ tale che $S(\mathbf{p}, \mathbf{C}) \subseteq S(\mathbf{p}', \mathbf{C})$. Si osserva, inoltre, che $\mathbf{p}' \in \mathcal{Q}'$. Si ottiene anche $S(\mathbf{q}, \mathbf{C}) \setminus \mathbf{C}_{\geq} \subseteq S(\mathbf{p}', \mathbf{C})$. Se indichiamo con \mathbf{p}'_0 il punto $(\mathbf{y}^T, 0)^T$, per il Lemma 5.17, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} S(\mathbf{q}_0, (\mathbf{C}_= \cup \mathbf{C}_> \cup \mathbf{C}_{\geq} \cup \mathbf{C}_\varepsilon)) &= S(\mathbf{q}_0, \mathbf{C}_= \cup \mathbf{C}_{\geq}) \\ &\subseteq S(\mathbf{p}', \mathbf{C}_= \cup \mathbf{C}_{\geq}) \\ &= S(\mathbf{p}'_0, (\mathbf{C}_= \cup \mathbf{C}_> \cup \mathbf{C}_{\geq} \cup \mathbf{C}_\varepsilon)) \\ &\subseteq S(\mathbf{p}'_0, \mathbf{C}). \end{aligned}$$

Consideriamo un vincolo $c \in \mathbf{C}_= \cup \mathbf{C}_> \cup \mathbf{C}_{\geq} \cup \mathbf{C}_\varepsilon$ soddisfatto da $\mathbf{p}' \in \mathcal{Q}$. Se $c \in S(\mathbf{q}_0, \mathbf{C})$, allora $c \in S(\mathbf{p}'_0, \mathbf{C})$ e quindi tutti i punti che appartengono alla rette passante per \mathbf{q}_0 e \mathbf{p}'_0 saturano c . Al contrario, se $c \notin S(\mathbf{q}_0, \mathbf{C})$, allora c non può essere un'equazione (ogni punto deve saturare tutte le equazioni). Sia quindi $c \in \mathbf{C}_> \cup \mathbf{C}_{\geq} \cup \mathbf{C}_\varepsilon$ e della forma $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle + s \cdot \varepsilon \geq b$: abbiamo per le

ipotesi fatte, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{t} \rangle > b$. Consideriamo

$$\mu_c = \begin{cases} \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{t} \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle - b}, & \text{se } \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle > \langle \mathbf{a}, \mathbf{t} \rangle \text{ e } \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle > b; \\ 1, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$\mathbf{t}_c = (1 + \mu_c)\mathbf{t} - \mu_c\mathbf{y}'.$$

Quindi $(\mathbf{t}_c^T, 0)^T$ appartiene alla retta passante per \mathbf{q}_0 e \mathbf{p}'_0 e soddisfa c . Ora consideriamo

$$\mu = \min\{ \mu_c \in \mathbb{R} \mid c \in \mathbf{C} \setminus S(\mathbf{q}_0, \mathbf{C}) \};$$

$$\mathbf{t}_\mu = (1 + \mu)\mathbf{t} - \mu\mathbf{y}'.$$

Quindi $(\mathbf{t}_\mu^T, 0)^T$ soddisfa tutti i vincoli di $(\mathbf{C}_= \cup \mathbf{C}_> \cup \mathbf{C}_\geq \cup \mathbf{C}_\varepsilon)$. Per il Lemma 5.17, $\{c^*\} = \mathbf{C} \setminus (\mathbf{C}_= \cup \mathbf{C}_> \cup \mathbf{C}_\geq \cup \mathbf{C}_\varepsilon)$ e $S(c^*, \mathbf{G}) = L \cup R \cup \mathbf{G}_C$. Si ha perciò che $(\mathbf{t}_\mu^T, 0)^T$ soddisfa tutti i vincoli di \mathbf{C} , da cui $(\mathbf{t}_\mu^T, 0)^T \in \mathcal{Q}$. Inoltre, $(\mathbf{t}_\mu^T, 0)^T \in \mathcal{Q}'$, perché $\mathbf{G}_C = \mathbf{G}'_C$. Indicando con λ il rapporto $\frac{1}{1+\mu}$, abbiamo $0 < \lambda < 1$ e $\mathbf{t} = \lambda\mathbf{t}_\mu + (1 - \lambda)\mathbf{y}'$. Possiamo perciò scrivere

$$(\mathbf{t}^T, (1 - \lambda)e')^T = \lambda(\mathbf{t}_\mu^T, 0)^T + (1 - \lambda)\mathbf{p}' \in \mathcal{Q}'.$$

Infine, $\mathbf{t} \in \llbracket \mathcal{Q}' \rrbracket$, perché $e' > 0$ e $\lambda < 1$. □

Proposizione 5.21 *Sia $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\mathbf{C})$ un poliedro chiuso di \mathbb{R}^{n+1} tale che $\mathcal{Q} \rightrightarrows_\varepsilon \mathcal{P} \neq \emptyset$ e \mathbf{C} sistema minimale. Allora, se \mathbf{C} non contiene vincoli ε -ridondanti, \mathbf{C} è in forma minimale forte.*

DIMOSTRAZIONE: Per dimostrare questa proposizione, supponiamo che il sistema minimale \mathbf{C} non sia in forma minimale forte e dimostriamo che contiene vincoli ε -ridondanti. Esiste perciò un sistema di vincoli \mathbf{C}' minimale tale che $(\mathbf{C}'_= \cup \mathbf{C}'_> \cup \mathbf{C}'_\geq) \subset (\mathbf{C}_= \cup \mathbf{C}_> \cup \mathbf{C}_\geq)$ e $\mathcal{Q}'(\mathbf{C}') \rightrightarrows_\varepsilon \mathcal{P}$.

Consideriamo $c \in (\mathbf{C}_= \cup \mathbf{C}_> \cup \mathbf{C}_\geq) \setminus \mathbf{C}'$. Non può accadere che c sia un'equazione, perché se ciò fosse vero il sistema \mathbf{C} conterrebbe un'equazione in più di \mathbf{C}' , ma \mathbf{C} era un sistema minimale per il poliedro \mathcal{Q} . Si ha allora che c è della forma $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle + s \cdot \varepsilon \geq b$, con $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $s \leq 0$ e $b \in \mathbb{R}$.

Dimostriamo che $c \in \mathbf{C}_>$. Per far questo procediamo per assurdo, supponendo che $c \in \mathbf{C}_\geq$, cioè $s = 0$. Poiché \mathbf{C} è in forma minimale, esiste un punto $\mathbf{p} = (\mathbf{v}^T, e)^T$ che appartiene al poliedro generato dal sistema $\mathbf{C} \setminus \{c\}$ che non soddisfa c : quindi anche $\mathbf{p}_0 = (\mathbf{v}^T, 0)^T$ non soddisfa c . Per il Lemma 5.18, abbiamo $\mathbf{v} \notin \mathbb{C}(\mathcal{P})$, perché $\mathcal{Q} \rightrightarrows_\varepsilon \mathcal{P}$. Per ipotesi $\mathcal{Q}' \rightrightarrows_\varepsilon \mathcal{P}$, e, ancora per il Lemma 5.18, abbiamo $\mathbf{p}_0 \notin \mathcal{Q}'$. Per la condizione (5.3), si ha $(\mathbf{v}^T, e')^T \notin \mathcal{Q}'$ per ogni $e' \geq 0$. Comunque, per qualche $e' > 0$, $(\mathbf{v}^T, e')^T$ soddisfa i vincoli

di \mathbf{C}'_ε e per ipotesi, soddisfa ogni vincolo in $\mathbf{C}'_{>} \cup \mathbf{C}'_{\geq} \cup \mathbf{C}'_{=}$. Poiché \mathbf{C}' è in forma minimale, per il Lemma 5.17, $\mathbf{C}' \setminus (\mathbf{C}'_{=} \cup \mathbf{C}'_{>} \cup \mathbf{C}'_{\geq} \cup \mathbf{C}'_\varepsilon) = \{c^*\}$, con c^* della forma $\langle \mathbf{a}^*, \mathbf{x} \rangle + s^* \cdot \varepsilon \geq b^*$ e $s^* > 0$. Di conseguenza $(\mathbf{v}^T, e')^T$ non soddisfa c^* ed esiste $e^* > e'$ tale che $\mathbf{p}^* = (\mathbf{v}^T, e^*)^T$ satura c^* e soddisfa ogni vincolo di $\mathbf{C}' \setminus \mathbf{C}'_\varepsilon$. Poiché $\mathcal{Q}' \neq \emptyset$ e \mathbf{C}' è in forma minimale, esiste un punto $\mathbf{q}_0 = (\mathbf{t}^T, e_t)^T \in \mathcal{Q}'$ che satura c^* . Per il Lemma 5.16 ($s^* > 0$), otteniamo $e_t = 0$. Quindi, ogni combinazione convessa di \mathbf{p}^* e \mathbf{q}_0 satura c^* e soddisfa tutti i vincoli di $\mathbf{C}' \setminus \mathbf{C}'_\varepsilon$. Allora, per qualche $0 < \lambda < 1$, la combinazione convessa

$$\lambda \mathbf{p}^* + (1 - \lambda) \mathbf{q}_0 = (\mathbf{y}^T, \lambda e^*)^T$$

soddisfa i vincoli di \mathbf{C}' e satura c^* : poiché $\lambda e^* > 0$ e $s^* > 0$, il punto $\mathbf{q}_0 = \lambda \mathbf{p}_0 + (1 - \lambda) \mathbf{q}_0$ non soddisfa c^* . Quindi non è soddisfatta la condizione (5.3) e ciò contraddice l'ipotesi che \mathcal{Q}' è una ε -rappresentazione.

Possiamo quindi dire che $c \in \mathbf{C}_{>}$, cioè $s < 0$. Supponiamo dapprima che non ci siano punti nel poliedro generato dal sistema (L, R, \mathbf{G}_C) che saturano c ; ciò implica $S(c, \mathbf{G}) \cap \mathbf{G}_C = \emptyset$ e per la Definizione 5.14, c è ε -ridondante in \mathbf{C} .

Supponiamo ora che c sia saturato dal almeno un punto del poliedro generato dal sistema (L, R, \mathbf{G}_C) : dimostriamo che per ogni punto $\mathbf{p}_0 = (\mathbf{v}^T, 0)^T$ che appartiene a questo poliedro, esiste $c' \in \mathbf{C}'_{>}$ che è saturato da \mathbf{p}_0 , ma non è soddisfatto da $(\mathbf{v}^T, e)^T$, con $e > 0$. Osserviamo che $(\mathbf{v}^T, e)^T \notin \mathcal{Q}$, per ogni $e > 0$, perché $s < 0$. Per la condizione (5.4), $\mathbf{p} \notin \mathcal{P}$, perché $\mathcal{Q} \Rightarrow_\varepsilon \mathcal{P}$ e per il Lemma 5.18, $\mathbf{v} \in \mathcal{C}(\mathcal{P})$. Applicando nuovamente la condizione (5.4) e il Lemma 5.18, per l'ipotesi $\mathcal{Q}' \Rightarrow_\varepsilon \mathcal{P}$, abbiamo $(\mathbf{v}^T, e)^T \notin \mathcal{Q}'$ per ogni $e > 0$ e $\mathbf{p}_0 \in \mathcal{Q}'$. Di conseguenza, esiste un vincolo $c' \in \mathbf{C}$ della forma $\langle \mathbf{a}', \mathbf{x} \rangle + s' \cdot \varepsilon \geq b'$ tale che è saturato da \mathbf{p}_0 , ma non è soddisfatto da $(\mathbf{v}^T, e)^T$, con $e > 0$. Quindi, abbiamo $s' < 0$ e $c' \in \mathbf{C}_{>}$.

Sia $S = S(c, \mathbf{G}) \setminus \mathbf{G}_V$ e definiamo un nuovo sistema di generatori $\mathbf{G}_S = (L \cap S, R \cap S, V \cap S) = (L, R \cap S, V \cap S)$. Supponiamo ora che, per ogni vincolo $c_i \in \mathbf{C}_{>} = \{c_1, \dots, c_k\}$, esista un punto \mathbf{q}_i appartenente al poliedro generato dal sistema \mathbf{G}_S che non satura c_i . Allora, la combinazione convessa $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mathbf{q}_k$ satura c , ma non i vincoli di $\mathbf{C}_{>}$, contraddicendo le osservazione fatte nel paragrafo precedente. Di conseguenza, esiste un vincolo $c' \in \mathbf{C}'_{>}$ che è saturato da tutti i punti del poliedro generato da \mathbf{G}'_S . Si ha $V \cap S \neq \emptyset$ perché esiste un punto in \mathcal{Q} che satura c . Ogni punto del poliedro generato da \mathbf{G}_S è ottenuto sommando un combinazione lineare di rette, una combinazione positiva di raggi di $R \cap S$ e un combinazione convessa dei punti di $V \cap S$ e da ciò si osserva che $S \subseteq S(c', \mathbf{G})$. Dalla Definizione 5.14, segue che c è ε -ridondante in \mathbf{C} . \square

Proposizione 5.22 *Sia $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\mathbf{G})$ un poliedro chiuso di \mathbb{R}^{n+1} tale che*

$Q \Rightarrow_\epsilon \mathcal{P} \neq \emptyset$ e \mathbf{G} sistema minimale. Allora, se \mathbf{G} non contiene generatori ε -ridondanti, \mathbf{G} è in forma minimale forte.

DIMOSTRAZIONE: Per dimostrare questa proposizione, supponiamo che $\mathbf{G} = (L, R, V)$ non sia in forma minimale forte e dimostriamo che contiene almeno un generatore ε -ridondante. Per la Definizione 5.13, esiste un sistema di generatori $\mathbf{G}' = (L', R', V') \neq \mathbf{G}$ tale che $L' \subseteq L$, $R' \subseteq R$ e $V' \subseteq V$ e $Q'(\mathbf{G}') \Rightarrow_\epsilon \mathcal{P}$.

Per prima cosa dimostriamo che $V' \subset V$. Supponiamo per assurdo che $V' = V$ e quindi $L' \subset L$ oppure $R' \subset R$. Se siamo nel caso in cui $R' \subset R$, allora sia $\mathbf{r} \in R \setminus R'$ e definiamo $R'' = R \setminus \{\mathbf{r}\}$: si ha $R' \subseteq R'' \subset R$. Per la monotonia del costruttore dei poliedri a partire da un sistema di generatori, si osserva

$$Q'(\mathbf{G}') \subseteq Q''((L', R'', V)) \subset Q(\mathbf{G}),$$

dove l'inclusione stretta vale perché avevamo supposto che \mathbf{G} fosse in forma minimale. Osserviamo che si ottiene che $Q''((L', R'', V)) \Rightarrow_\epsilon \mathcal{P}$, perché $Q' \Rightarrow_\epsilon \mathcal{P}$ e $Q \Rightarrow_\epsilon \mathcal{P}$ e per la monotonia di $[\![\cdot]\!]$. Dimostriamo che $[\![Q'']\!] \subset \mathcal{P}$. Esiste un $(\mathbf{t}^T, e_t)^T \in Q$ con $e_t > 0$, perché $\mathcal{P} \neq \emptyset$. Quindi per la condizione (5.3), si ha $(\mathbf{t}^T, 0)^T \in Q$. Per il Lemma 5.8, si può assumere che $\mathbf{r} = (\mathbf{y}^T, 0)^T$. Ma $\mathbf{r} \notin R''$ e \mathbf{G} è in forma minimale e quindi esiste $\mu \geq 0$ tale che, se $\mathbf{t}_\mu = \mathbf{t} + \mu\mathbf{y}$, allora $(\mathbf{t}_\mu^T, 0)^T \notin Q''$; per il Lemma 5.18 $\mathbf{t}_\mu \notin \mathbb{C}(\mathcal{P})$. Quindi ancora per il Lemma 5.18, si ha $(\mathbf{t}_\mu^T, 0)^T \notin Q$, arrivando ad un assurdo, perché avevamo supposto che $\mathbf{r} \in R$.

Procedendo in modo analogo a quello dei raggi si arriva a dimostrare anche che non può accadere che $L' \subset L$: quindi $V' \subset V$.

Sia perciò $\mathbf{p} = (\mathbf{v}^T, e)^T \in V \setminus V'$ e definiamo $V'' = V \setminus \{\mathbf{p}\}$: si ha $V' \subseteq V'' \subset V$ e

$$Q'(\mathbf{G}') \subseteq Q''((L, R, V'')) \subset Q(\mathbf{G}),$$

e $\mathbf{p} \notin Q''$. Per quello che abbiamo appena osservato, per $Q' \Rightarrow_\epsilon \mathcal{P}$, $Q \Rightarrow_\epsilon \mathcal{P}$ e per la monotonia di $[\![\cdot]\!]$, otteniamo che $Q'' \Rightarrow_\epsilon \mathcal{P}$.

Verifichiamo che \mathbf{p} è ε -ridondante in \mathbf{G} .

Dimostriamo ora che $\mathbf{p} = (\mathbf{v}^T, e)^T \notin \mathbf{G}_C$, cioè che $e > 0$. Supponiamo per assurdo che $e = 0$. Allora per il Lemma 5.18, $\mathbf{v} \in \mathbb{C}(\mathcal{P})$. Quindi, poiché $Q'' \Rightarrow_\epsilon \mathcal{P}$, e ancora per il Lemma 5.18, $\mathbf{p} = (\mathbf{v}^T, 0)^T \in Q''$ che è assurdo perché avevamo supposto che $\mathbf{p} \notin Q''$. Si ha perciò $\mathbf{p} \in \mathbf{G}_V$.

Sia ora \mathbf{C} un sistema di vincoli in forma minimale tale che $Q = Q(\mathbf{C})$: dimostriamo che esiste un punto $\mathbf{p}' \in \mathbf{G}_V \setminus \{\mathbf{p}\}$ tale che

$$S(\mathbf{p}, \mathbf{C}) \cap \mathbf{C}_{\geq} \subseteq S(\mathbf{p}', \mathbf{C}). \quad (5.6)$$

Per la condizione (5.4), si ha $\mathbf{v} \in \mathcal{P}$, perché $\mathbf{p} \in \mathcal{Q}$; e, poiché $[\mathcal{Q}'] = \mathcal{P}$, deve esistere $e_q > 0$ tale che $\mathbf{q} = (\mathbf{v}^T, e_q)^T \in \mathcal{Q}'$. Quindi, deve esistere un punto $\mathbf{p}' \in \mathbf{G}_V \setminus \{\mathbf{p}\}$ che compare nella combinazione che genera \mathbf{q} con coefficiente positivo. Sia ora $c' \in S(\mathbf{p}, \mathbf{C}) \cap \mathbf{C}_{\geq}$ una disequazione non stretta della forma $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle + 0 \cdot \varepsilon \geq b$: \mathbf{q} satura c' . Questo implica che c' è anche saturato da \mathbf{p}' . Poiché c' era un arbitrario elemento di \mathbf{C}_{\geq} , si ha la (5.6). Ora dimostriamo che $\mathbf{p} \in \mathbf{G}_U$. Per assurdo supponiamo che $\mathbf{p}_0 = (\mathbf{v}^T, 0)^T \in V$; inoltre, consideriamo $\mathbf{p}' = (\mathbf{y}^T, e')^T$ e $\mathbf{p}'_0 = (\mathbf{y}^T, 0)^T$. Per la condizione (5.3), $\mathbf{p}'_0 \in \mathcal{Q}$. Per il Lemma 5.17, abbiamo

$$\begin{aligned} S(\mathbf{p}_0, \mathbf{C}) \cap \mathbf{C}_{\geq} &= S(\mathbf{p}, \mathbf{C}) \cap \mathbf{C}_{\geq}, \\ S(\mathbf{p}'_0, \mathbf{C}) \cap \mathbf{C}_{\geq} &= S(\mathbf{p}', \mathbf{C}) \cap \mathbf{C}_{\geq}, \end{aligned}$$

e per la condizione (5.6), otteniamo

$$S(\mathbf{p}_0, \mathbf{C}) \cap \mathbf{C}_{\geq} \subseteq S(\mathbf{p}'_0, \mathbf{C}) \cap \mathbf{C}_{\geq}. \quad (5.7)$$

Supponiamo dapprima $e < e'$ e consideriamo $\mathbf{p}'_e = (\mathbf{y}^T, e)^T$: allora, ponendo $0 < \lambda = \frac{e}{e'} < 1$, il punto $\mathbf{q}_e = (\mathbf{t}^T, e)^T = \lambda \mathbf{p}' + (1 - \lambda) \mathbf{p}_0$ è una combinazione convessa di \mathbf{p}' e \mathbf{p}_0 ed appartiene a \mathcal{Q} . Sia ora $\mathbf{r} = \mathbf{p} - \mathbf{q}_e$: allora \mathbf{r} non può essere un raggio di \mathcal{Q} , perché altrimenti \mathbf{p} apparterebbe al poliedro generato da $(L, R, \{\mathbf{p}', \mathbf{p}_0\})$, contraddicendo l'ipotesi che \mathbf{G} fosse minimale. Per ogni $\mu \in \mathbb{R}_+$, definiamo $\mathbf{p}_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{p}_0 + \mu \mathbf{r}$. Poiché \mathbf{r} non è un raggio di \mathcal{Q} , deve esistere $\mu' \in \mathbb{R}_+$, tale che per ogni $\mu > \mu'$, si ha $\mathbf{p}_\mu \notin \mathcal{Q}$. Se $\mu' > 0$, allora $\mathbf{p}_{\mu'} \neq \mathbf{p}_0$: quindi, \mathbf{p}_0 può essere espresso come combinazione convessa di $\mathbf{p}_{\mu'}$ e \mathbf{p}'_0 , contraddicendo l'ipotesi che \mathbf{G} fosse in forma minimale. Si ha perciò $\mu' = 0$, cioè $\mathbf{p}_{\mu'} = \mathbf{p}_0$. Di conseguenza deve esistere un vincolo $c \in \mathbf{C}$ tale che è saturato da \mathbf{p}_0 , ma non da \mathbf{p}'_0 . Dal momento che \mathbf{C} è in forma minimale, per il Lemma 5.17, $\mathbf{C} \setminus (\mathbf{C}_{>} \cup \mathbf{C}_{=} \cup \mathbf{C}_{\geq} \mathbf{C}_\varepsilon) = \{c^*\}$ e $S(c^*, \mathbf{G}) = L \cup R \cup \mathbf{G}_C$: \mathbf{p}_0 e \mathbf{p}'_0 saturano perciò c^* . Ancora per il Lemma 5.17, poiché \mathbf{p}'_0 non satura c , otteniamo $c \in \mathbf{C}_{>} \cup \mathbf{C}_{=} \cup \mathbf{C}_{\geq} \mathbf{C}_\varepsilon$: da questo e per il fatto che \mathbf{p}_0 satura c , per il Lemma 5.17, si ha $c \in \mathbf{C}_{\geq}$. Questo contraddice la condizione (5.7), e quindi non può accadere che $e < e'$.

Supponiamo ora che $e \geq e'$. Sia $\mathbf{p}_{e'} = (\mathbf{v}^T, e')^T$: allora $\mathbf{p}_{e'} \in \mathcal{Q}$ può essere ottenuto come combinazione convessa di \mathbf{p} e \mathbf{p}_0 . Inoltre, sia $\mathbf{r}' = \mathbf{p}' - \mathbf{p}_{e'}$: allora \mathbf{r}' non può essere un raggio di \mathcal{Q} , perché altrimenti \mathbf{p}' apparterebbe al poliedro generato da $(L, R, \{\mathbf{p}, \mathbf{p}_0\})$, contraddicendo l'ipotesi che \mathbf{G} fosse minimale. Ponendo $\mathbf{p}_\mu = \mathbf{p}_0 - \mu \mathbf{r}'$, otteniamo $\mathbf{p}_\mu \notin \mathcal{Q}$ per ogni $\mu > 0$. Quindi siamo nella stessa condizione del caso precedente e allo stesso modo arriviamo ad un assurdo.

Di conseguenza non può accadere che $\mathbf{p}_0 \in V$ e quindi $\mathbf{p} \in \mathbf{G}_U$. \square

Esempio 5.23 *Continuiamo a considerare l'Esempio 5.12 e individuiamo il sistema di generatori in forma minimale forte che lo descrive. Si osserva che i punti E' ed F' sono ε -ridondanti, perché D' satura $x \geq 2$ e $y \leq 6$, E' satura solamente $x \geq 2$, mentre F' solo $y \leq 6$. Il sistema di generatori in forma minimale forte che descrive questo poliedro è quindi formato solamente dal punto D e dai punti di chiusura A' , B' e C' .*

Capitolo 6

Operazioni per l'analisi e la verifica

6.1 Operazioni sui poliedri

Definiamo ora alcune operazioni che possiamo compiere sui poliedri. Si vedrà come alcune di queste possono essere specificate facilmente operando sulla rappresentazione implicita, altre su quella parametrica, altre ancora su entrambe.

Alcune delle operazioni che tratteremo possono essere estese facilmente dal dominio dei poliedri chiusi a quello dei poliedri NNC: in questo caso verranno descritti i metodi utilizzati per calcolare i risultati in entrambi i casi. Per altre operazioni, invece, verranno presentati in questa sezione i metodi nel caso di poliedri chiusi e successivamente (nella sezione 6.2) verrà descritto in modo formale come sia possibile utilizzare la ε -rappresentazione per ricondursi al caso dei poliedri chiusi.

6.1.1 Poliedro vuoto

Per verificare se un poliedro è vuoto, la rappresentazione che risulta più utile è quella parametrica, perché è sufficiente controllare se il sistema di generatori non contiene punti. Per verificare se un poliedro definito da un sistema di vincoli è vuoto, bisogna verificare se il sistema che lo descrive è insoddisfacibile: la verifica di soddisfacibilità, però, è computazionalmente complessa, soprattutto se il numero di vincoli è elevato. Nell'economia complessiva della computazione è perciò più conveniente calcolare il corrispondente sistema di generatori e ricondursi al caso precedente: in questo modo la rappresentazione parametrica del poliedro rimane a disposizione per eventuali operazioni successive.

6.1.2 Test di inclusione e di uguaglianza

Siano \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 due poliedri necessariamente chiusi di \mathbb{R}^n e supponiamo di voler verificare se $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2$. Per far questo, possiamo controllare se ogni generatore del primo poliedro soddisfa tutti i vincoli del secondo. È quindi necessario avere il sistema di generatori di \mathcal{P}_1 e il sistema di vincoli di \mathcal{P}_2 .

Esempio 6.1 Sia $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ il cono poliedrale puntato il cui sistema di generatori è formato dall'origine e dai raggi estremali di direzione $(1, 0)^T$ e $(0, 1)^T$. Sia inoltre \mathcal{P}_2 il semispazio positivo delle ordinate (cioè definito dal vincolo $y \geq 0$). Si verifica che $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2$ perché l'origine e i due raggi soddisfano tutti il vincolo $y \geq 0$.

Siano \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 due poliedri NNC di \mathbb{R}^n . Per verificare se $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2$ è sufficiente estendere, in modo intuitivo, la tecnica proposta per i poliedri chiusi. L'unica accortezza riguarda il caso in cui il generatore di \mathcal{P}_1 sia un punto di chiusura e il vincolo di \mathcal{P}_2 sia una disequazione stretta. Se $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle > b$ è la disequazione stretta di \mathcal{P}_2 , e \mathbf{c} è un punto di chiusura di \mathcal{P}_1 , allora la condizione da verificare è $\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \geq b$.

Esempio 6.2 Vogliamo verificare se il poliedro NNC $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ descritto dal sistema di vincoli $0 \leq x < y < 3$ è contenuto nel poliedro NNC $\mathcal{P}_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ descritto da $0 \leq y < 3$. Per descrivere il poliedro \mathcal{P}_1 sono necessari i punti di chiusura $A = (0, 0)^T$, $B = (3, 3)^T$ e $C = (3, 0)^T$ e un punto $D = (1, 0)^T$. Il punto D verifica entrambe le disequazioni che definiscono \mathcal{P}_2 e tutti i punti di chiusura di \mathcal{P}_1 soddisfano la disequazione $y \geq 0$ e sono tali che $y \leq 3$. Il poliedro \mathcal{P}_1 è perciò contenuto in \mathcal{P}_2 .

Il test di inclusione di due poliedri è utilizzato anche per implementare quello di uguaglianza: per verificare se $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$, è sufficiente controllare se valgono entrambe le inclusioni $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2$ e $\mathcal{P}_2 \subseteq \mathcal{P}_1$.

6.1.3 Poliedro limitato

Per verificare se un poliedro $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ è limitato, la rappresentazione da utilizzare è quella parametrica. Infatti, \mathcal{P} è limitato se e solo se non contiene nessun raggio e nessuna retta.

6.1.4 Intersezione

L'insieme dei poliedri di \mathbb{R}^n è chiuso rispetto all'operazione di intersezione insiemistica di un numero finito di poliedri. In questa sezione, descriviamo

un metodo per calcolare l'operazione di intersezione sul dominio dei poliedri chiusi, mentre nella sezione 6.2.1 presentiamo in modo formale come si può estendere questa operazione sul dominio dei poliedri NNC usando la ε -rappresentazione.

Per ottenere l'intersezione di due poliedri conviene considerare la loro rappresentazione implicita. Infatti, se

$$\mathcal{P}_1 = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A'\mathbf{x} = \mathbf{b}', C'\mathbf{x} \geq \mathbf{d}' \}$$

con $A' \in \mathfrak{M}_{m'_1, n}$, $C' \in \mathfrak{M}_{m'_2, n}$, $\mathbf{b}' \in \mathbb{R}^{m'_1}$ e $\mathbf{d}' \in \mathbb{R}^{m'_2}$ e

$$\mathcal{P}_2 = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A''\mathbf{x} = \mathbf{b}'', C''\mathbf{x} \geq \mathbf{d}'' \}$$

con $A'' \in \mathfrak{M}_{m''_1, n}$, $C'' \in \mathfrak{M}_{m''_2, n}$, $\mathbf{b}'' \in \mathbb{R}^{m''_1}$ e $\mathbf{d}'' \in \mathbb{R}^{m''_2}$, allora la rappresentazione implicita del poliedro intersezione \mathcal{P} si può ottenere unendo le matrici dei vincoli di \mathcal{P}_1 e di \mathcal{P}_2 . Quindi il poliedro \mathcal{P} si può scrivere come

$$\mathcal{P} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \bar{A}\mathbf{x} = \bar{\mathbf{b}}, \bar{C}\mathbf{x} \geq \bar{\mathbf{d}} \}$$

dove le matrici dei vincoli con i loro rispettivi coefficienti sono

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A' \\ A'' \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}' \\ \mathbf{b}'' \end{pmatrix}$$

per le equazioni e

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} C' \\ C'' \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{d}} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}' \\ \mathbf{d}'' \end{pmatrix}$$

per le disequazioni. Questo è vero perché se $\mathbf{x} \in \mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$, allora \mathbf{x} deve appartenere sia a \mathcal{P}_1 che a \mathcal{P}_2 e quindi deve soddisfare tutti i vincoli dei due poliedri. In generale, si osserva che il sistema di vincoli ottenuto può contenere vincoli ridondanti.

Esempio 6.3 *Ora mostriamo un esempio dell'operazione di intersezione tra due poliedri.*

Siano \mathcal{P}' e \mathcal{P}'' due poliedri di \mathbb{R}^2 definiti come segue:

$$\mathcal{P}' = \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq \mathbf{0} \right\},$$

$$\mathcal{P}'' = \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq \mathbf{0} \right\}.$$

Seguendo la procedura descritta precedentemente, l'intersezione $\mathcal{P} = \mathcal{P}' \cap \mathcal{P}''$, si può descrivere nel seguente modo:

$$\mathcal{P} = \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \\ -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq \mathbf{0} \right\}.$$

Facilmente si osserva che la descrizione di \mathcal{P} contiene due disequazioni che non generano faccette: i vincoli

$$\begin{aligned} x - 3y &\leq 0 \\ 3x - y &\geq 0 \end{aligned} \tag{6.1}$$

non soddisfano le regole di saturazione. Infatti, si nota che i generatori che formano questo poliedro \mathcal{P} sono

$$O = (0, 0)^T, \quad \mathbf{r}_1 = (2, 1)^T \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_2 = (1, 2)^T$$

e di questi solo il primo satura i vincoli (6.1).

Quindi il poliedro intersezione $\mathcal{P} = \mathcal{P}' \cap \mathcal{P}''$ è

$$\mathcal{P} = \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq \mathbf{0} \right\}.$$

6.1.5 Inviluppo poliedrale

L'insieme dei poliedri non è chiuso rispetto all'operazione di unione insiemistica, perché l'unione di due insieme convessi in generale non è convessa. Per ottenere un'operazione il cui risultato contenga entrambi i poliedri di partenza, definiamo l'operazione di *inviluppo poliedrale*. In questa sezione descriviamo un metodo per calcolare l'inviluppo poliedrale sul dominio dei poliedri chiusi, mentre nella sezione 6.2.2, presenteremo in modo formale come questa operazione possa essere estesa sul dominio dei poliedri NNC, usando la ε -rappresentazione.

Definizione 6.4 (Inviluppo poliedrale) Siano \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 due poliedri chiusi (risp., NNC) di \mathbb{R}^n . Si dice *inviluppo poliedrale* (o *poly_hull*) dei poliedri \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 e si indica come $\mathcal{P}_1 \uplus \mathcal{P}_2$ il più piccolo poliedro chiuso (risp., NNC) $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ che contiene \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 .

È necessario dimostrare che esiste il più piccolo poliedro che contiene \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 . Supponiamo che \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 siano poliedri chiusi. Per prima cosa osserviamo che se consideriamo due sistemi di generatori $\mathbf{G}' = (L', R', V')$ e $\mathbf{G}'' = (L'', R'', V'')$ tali che $L' \subseteq L'', R' \subseteq R'', V' \subseteq V''$, allora $\mathcal{P}'(\mathbf{G}') \subseteq \mathcal{P}''(\mathbf{G}'')$. Infatti, ogni punto che si può scrivere con combinazioni legali degli elementi di \mathbf{G}' può anche essere espresso utilizzando gli elementi di \mathbf{G}'' , perché quest'ultimo contiene tutti gli elementi di \mathbf{G}' .

Siano quindi \mathbf{G}_1 e \mathbf{G}_2 sistemi di generatori tali che $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_1(\mathbf{G}_1)$ e $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_2(\mathbf{G}_2)$ e consideriamo l'insieme $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \cup \mathbf{G}_2$ e il poliedro $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbf{G})$. Per quanto visto sopra, \mathcal{P} contiene $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. Inoltre, \mathcal{P} è il più piccolo poliedro che gode di questa proprietà, perché ogni altro poliedro, dovendo poter generare sia \mathcal{P}_1 che \mathcal{P}_2 , deve contenere tutti gli elementi di \mathbf{G} . Le stesse osservazioni si possono fare nel caso in cui i poliedri sono NNC.

Si osserva che, in generale, l'involuppo poliedrale di \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 è diverso dall'involuppo convesso dei due poliedri. Inoltre, l'involuppo poliedrale di due poliedri chiusi è ancora un poliedro chiuso.

La rappresentazione più utile per questa operazione è perciò quella parametrica. Quindi, se i due poliedri sono definiti come:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1 &= \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = L_1 \boldsymbol{\lambda}' + R_1 \boldsymbol{\mu}' + V_1 \boldsymbol{\nu}', \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\nu}' \geq \mathbf{0}, \sum \nu'_i = 1 \} \\ \mathcal{P}_2 &= \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = L_2 \boldsymbol{\lambda}'' + R_2 \boldsymbol{\mu}'' + V_2 \boldsymbol{\nu}'', \boldsymbol{\mu}'', \boldsymbol{\nu}'' \geq \mathbf{0}, \sum \nu''_i = 1 \},\end{aligned}$$

il poliedro risultante è individuato da:

$$\mathcal{P} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = \bar{L} \bar{\boldsymbol{\lambda}} + \bar{R} \bar{\boldsymbol{\mu}} + \bar{V} \bar{\boldsymbol{\nu}}, \bar{\boldsymbol{\mu}}, \bar{\boldsymbol{\nu}} \geq \mathbf{0}, \sum \bar{\nu}_i = 1 \},$$

dove

$$\bar{L} = (L_1 \quad L_2) \quad \text{e} \quad \bar{R} = (R_1 \quad R_2) \quad \text{e} \quad \bar{V} = (V_1 \quad V_2).$$

In generale, come nel caso dell'intersezione, il poliedro ottenuto in questo modo può essere descritto da un sistema di generatori ridondante.

Esempio 6.5 Consideriamo ora due politopi in \mathbb{R}^2

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1 &= \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y)^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1 \right\}, \\ \mathcal{P}_2 &= \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y)^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^4 \lambda_i = 1 \right\},\end{aligned}$$

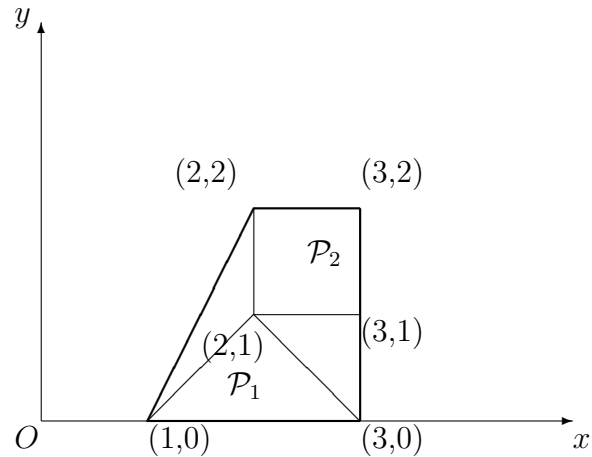


Figura 6.1: Poliedro involucro convesso di \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 .

e calcoliamo il loro involuppo poliedrale $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \uplus \mathcal{P}_2$. Seguendo il procedimento descritto precedentemente, otteniamo che il poliedro risultante è il seguente:

$$\mathcal{P} = \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{array}{l} (x, y)^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}, \\ \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^7 \lambda_i = 1 \end{array} \right. \right\}.$$

Come prima cosa si può osservare che nella matrice V di \mathcal{P} ci sono due punti uguali (cioè la terza e la quarta colonna). Successivamente, si può vedere che nell'insieme dei punti, alcuni di questi sono esprimibili come combinazione convessa di altri punti e quindi il sistema dei generatori non è più minimale. Utilizzando il processo di semplificazione possiamo vedere che ogni punto del poliedro risultante può essere ottenuto come combinazione convessa dei vertici: $(1, 0)^T$, $(3, 0)^T$, $(3, 2)^T$ e $(2, 2)^T$, come si vede in Figura 6.1.

6.1.6 Immagine di una trasformazione affine

Consideriamo un poliedro $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ e una particolare trasformazione affine $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ che assegna alla coordinata i -esima (con $1 \leq i \leq n$) l'espressione affine

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j + b,$$

lasciando invariate le altre coordinate. Quindi la trasformazione affine si può scrivere come $A\mathbf{x} + \mathbf{b}$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Definizione 6.6 (Immagine di una trasformazione affine) *Si dice che $\mathcal{P}' \subseteq \mathbb{R}^n$ è immagine di \mathcal{P} tramite la trasformazione affine f se $\mathcal{P}' = f(\mathcal{P}) = \{f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \in \mathcal{P}\}$. Questa operazione è anche detta affine image.*

Mostriamo ora un metodo per calcolare l'immagine di una trasformazione affine nel dominio dei poliedri chiusi; nella sezione 6.2.3, invece, mostreremo come questa operazione si possa estendere sul dominio dei poliedri NNC utilizzando la ε -rappresentazione.

Dal momento che la trasformazione affine in generale è formata da un termine omogeneo non nullo, per individuare il poliedro $\mathcal{P}' \subseteq \mathbb{R}^n$ è utile considerare il cono $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ottenuto dall'omogeneizzazione di \mathcal{P} e quindi utilizzarne la rappresentazione parametrica. Inoltre la trasformazione affine f si trasforma in una trasformazione lineare \bar{f} che è definita dalla matrice

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo quindi le immagini tramite \bar{f} dei generatori di \mathcal{C} :

1. se \mathbf{v} è un punto di \mathcal{P} , il corrispondente raggio del cono \mathcal{C} è $\hat{\mathbf{v}} = (\mathbf{v}, 1)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$. La sua immagine è ottenuta come

$$\hat{\mathbf{v}}' = \bar{f}(\hat{\mathbf{v}}) = \bar{A}\hat{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} A\mathbf{v} + \mathbf{b} \\ 1 \end{pmatrix};$$

2. se \mathbf{r} è un raggio di \mathcal{P} , il corrispondente raggio del cono \mathcal{C} è $\hat{\mathbf{r}} = (\mathbf{r}, 0)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$. La sua immagine è ottenuta come

$$\hat{\mathbf{r}}' = \bar{f}(\hat{\mathbf{r}}) = \bar{A}\hat{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} A\mathbf{r} \\ 0 \end{pmatrix};$$

3. per le rette del poliedro \mathcal{P} il procedimento è analogo a quello dei raggi e quindi si ottiene che

$$\hat{\mathbf{l}}' = \bar{f}(\hat{\mathbf{l}}) = \bar{A}\hat{\mathbf{l}} = \begin{pmatrix} A\mathbf{l} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A questo punto sono determinati tutti i punti del cono $\mathcal{C}' \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Come ultimo passo è necessario intersecare \mathcal{C}' con l'iperpiano determinato dall'equazione $x_{n+1} = 1$. Possiamo quindi dire che il poliedro $\mathcal{P}' \subseteq \mathbb{R}^n$ è l'insieme dei punti che si possono scrivere come

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' = f(\mathbf{x}) &= A\mathbf{x} + \mathbf{b} \\ &= (AL)\boldsymbol{\lambda} + (AR)\boldsymbol{\mu} + (AV + \mathbf{b})\boldsymbol{\nu} \\ &= L'\boldsymbol{\lambda} + R'\boldsymbol{\mu} + V'\boldsymbol{\nu}. \end{aligned}$$

Esempio 6.7 Consideriamo ora un poliedro $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^2$ definito come

$$\mathcal{P} = \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ con } \mu_1, \mu_2 \geq 0 \right\}$$

e la trasformazione che assegna alla prima coordinata x l'espressione

$$x + y + 1.$$

La trasformazione affine è quindi individuata dalla matrice e dal vettore

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il poliedro immagine $\mathcal{P}' \subseteq \mathbb{R}^2$ ha quindi come generatori il vertice

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= A(1, 0)^T + \mathbf{b} \\ &= (1, 0)^T + (1, 0)^T \\ &= (2, 0)^T \end{aligned}$$

e come raggi

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= A(1, 0)^T \\ &= (1, 0)^T \\ \mathbf{r}_2 &= A(0, 1)^T \\ &= (1, 0)^T + (0, 1)^T \\ &= (1, 1)^T. \end{aligned}$$

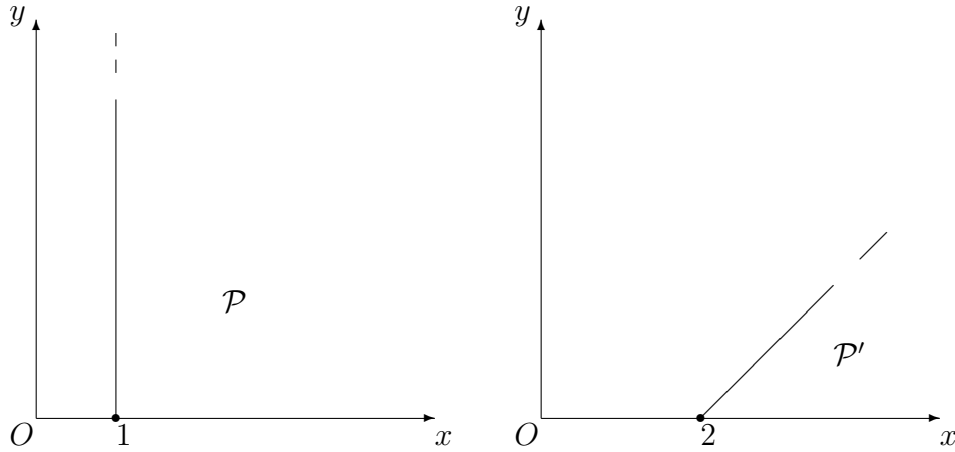


Figura 6.2: \mathcal{P}' è l'immagine del poliedro \mathcal{P} tramite la trasformazione $x' = x + y + 1$. A sua volta, \mathcal{P} è l'immagine inversa di \mathcal{P}' tramite la trasformazione affine specificata.

Il poliedro risultante è quindi definito come

$$\mathcal{P}' = \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ con } \mu_1, \mu_2 \geq 0 \right\}.$$

I due poliedri sono rappresentati in Figura 6.2.

6.1.7 Immagine inversa di una trasformazione affine

Consideriamo la trasformazione affine definita nel paragrafo 6.1.6.

Definizione 6.8 (Immagine inversa di una trasformazione affine) Si dice che $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ è immagine inversa di \mathcal{P}' tramite la trasformazione affine f e si indica con $\mathcal{P} = f^{-1}(\mathcal{P}')$ se $\mathcal{P}' = f(\mathcal{P})$. Questa operazione è anche detta affine preimage.

Anche in questo caso, presentiamo un metodo per calcolare l'immagine inversa di una trasformazione affine nel dominio dei poliedri chiusi; nella sezione 6.2.3, mostreremo come quest'operazione si possa estendere nel caso dei poliedri NNC utilizzando la ε -rappresentazione.

Per ottenere il poliedro \mathcal{P} è utile usare la rappresentazione implicita del poliedro \mathcal{P}' . Si ha quindi che \mathcal{P} è

$$\mathcal{P} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid C\mathbf{x} \geq \mathbf{d} \},$$

dove la disequazione matriciale è ottenuta nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} C & -\mathbf{d} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C' & -\mathbf{d}' \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}.$$

Questa relazione tra le matrici del primo poliedro e di quello risultante si ottiene considerando il cono che deriva dall'omogeneizzazione del poliedro e applicando la trasformazione affine

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}),$$

dove $\mathbf{x}' \in \mathcal{P}'$ e $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$. Quindi, se $\mathcal{C}' \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ è il cono ottenuto omogeneizzando \mathcal{P}' , si ha che il cono $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ è definito come

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \left\{ \hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \begin{pmatrix} C' & -\mathbf{d}' \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} f(\hat{\mathbf{x}}) \geq \mathbf{0} \right\} \\ &= \left\{ \hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \begin{pmatrix} C' & -\mathbf{d}' \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0} \right\} \\ &= \left\{ \hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \begin{pmatrix} C & -\mathbf{d} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0} \right\}. \end{aligned}$$

Esempio 6.9 Consideriamo come poliedro $\mathcal{P}' \subseteq \mathbb{R}^2$ il poliedro ottenuto come risultato dell'Esempio 6.7 e che si può scrivere come

$$\mathcal{P}' = \{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x - y - 2 \geq 0, y \geq 0 \}$$

e la stessa trasformazione affine.

Per ottenere il sistema dei vincoli che definiscono il nuovo poliedro dobbiamo applicare la matrice della trasformazione alle due disequazioni: la prima diventa $x - (1 - 1)y + 1 - 2 = x - 1 \geq 0$, mentre l'altra rimane invariata, perché in questa non compare la variabile x . Il poliedro risultante è il seguente:

$$\mathcal{P} = \{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1, y \geq 0 \}.$$

Si osserva che il poliedro ottenuto in questo modo è uguale a quello da cui eravamo partiti nell'Esempio 6.7 ottenendo \mathcal{P}' . Naturalmente, l'equivalenza vale per il fatto di aver considerato una trasformazione affine invertibile. In generale, invece, vale solo l'inclusione $\mathcal{P} \subseteq f^{-1}(f(\mathcal{P}))$.

6.1.8 Differenza poliedrale

La differenza insiemistica, come l'unione, non è un'operazione chiusa nell'insieme dei poliedri. Per ottenere un'operazione il cui risultato contenga la differenza tra due poliedri, definiamo l'operazione di *differenza poliedrale*.

Definizione 6.10 (Differenza poliedrale) *Dati \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 poliedri chiusi (risp., NNC) di \mathbb{R}^n , si definisce differenza poliedrale di \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 e si indica con $\mathcal{P}_1 \smile \mathcal{P}_2$ il più piccolo poliedro chiuso (risp., NNC) che contiene la differenza insiemistica di \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 .*

Un metodo per calcolare la differenza poliedrale tra \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 utilizza le rappresentazioni implicite di entrambi i poliedri. Siano \mathbf{C}_1 e $\mathbf{C}_2 = \{c_1, \dots, c_N\}$ i sistemi di vincoli tali che $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_1(\mathbf{C}_1)$ e $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_2(\mathbf{C}_2)$. Per ottenere il poliedro $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \smile \mathcal{P}_2$, si utilizza un procedimento iterativo sui vincoli che definiscono \mathcal{P}_2 :

$$\begin{cases} \mathcal{P}'_0 = \emptyset \\ \mathcal{P}'_k = \mathcal{P}'_{k-1} \uplus \mathcal{Q}_k \end{cases} \quad \text{per ogni } k = 1, \dots, N$$

dove $\mathcal{Q}_k \subseteq \mathbb{R}^n$ è il poliedro definito da

$$\mathcal{Q}_k = \begin{cases} \mathcal{P}(\mathbf{C}_1 \cup \{c'_k\}), & \text{se } c_k \text{ è una disequazione;} \\ \mathcal{P}(\mathbf{C}_1 \cup \{c'_k\}) \uplus \mathcal{P}(\mathbf{C}_1 \cup \{c''_k\}), & \text{se } c_k \text{ è un'equazione.} \end{cases}$$

con c'_k e c''_k due disequazioni che derivano dal vincolo $c_k : \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \bowtie b$, con $\bowtie \in \{=, \geq, >\}$. Per individuare le disequazioni c'_k e c''_k si procede nel modo seguente:

1. se stiamo calcolando $\mathcal{P}_1 \smile \mathcal{P}_2$ sul dominio dei poliedri chiusi, allora

$$\begin{aligned} c'_k &: -\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \geq -b, \\ c''_k &: \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \geq b; \end{aligned}$$

2. se, invece, stiamo calcolando $\mathcal{P}_1 \smile \mathcal{P}_2$ sul dominio dei poliedri NNC, allora

$$\begin{aligned} c'_k &: \begin{cases} -\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle > -b, & \text{se } \bowtie \in \{=, \geq\}; \\ -\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \geq -b, & \text{altrimenti.} \end{cases} \\ c''_k &: \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle > b. \end{aligned}$$

Si osserva che se \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 sono due poliedri chiusi, allora anche $\mathcal{P}_1 \smile \mathcal{P}_2$ è un poliedro chiuso.

Esempio 6.11 Consideriamo i poliedri chiusi \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 di \mathbb{R}^2 definiti come

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1 &= \{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0, x - y \geq 0, x + y - 4 \leq 0 \} \\ \mathcal{P}_2 &= \{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 3, x + y \geq 3, x - y \leq 1 \}.\end{aligned}$$

Il poliedro che si ottiene utilizzando la tecnica appena descritta è generato dai vertici $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})^T$, $(4, 0)^T$ e $(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})^T$.

6.1.9 Widening tra due poliedri

In letteratura si trovano vari operatori di widening per il dominio dei poliedri chiusi. In questa sezione presentiamo queste operazioni, individuando gli aspetti comuni e quelli per cui differiscono.

In alcune proposte, l'operatore di widening $\mathcal{P}_1 \nabla \mathcal{P}_2$ è definito solo nel caso in cui sia abbia $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2 \subseteq \mathbb{R}^n$. Per estendere queste definizioni è sufficiente considerare un'operazione di widening che indichiamo $\text{widen}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ tale che

$$\text{widen}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \mathcal{P}_1 \nabla (\mathcal{P}_1 \uplus \mathcal{P}_2).$$

P. Cousot e N. Halbwachs 1978

Il primo operatore di widening per i poliedri convessi topologicamente chiusi è stato introdotto in [CH78].

Definizione 6.12 (Widening di [CH78, Section 4.5]) *Dati due poliedri chiusi \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 di \mathbb{R}^n , definiti rispettivamente dal sistema di disequazioni \mathbf{C}_1 e dal sistema di generatori \mathbf{G}_2 , allora $\mathcal{P}_1 \nabla \mathcal{P}_2$ è il poliedro di \mathbb{R}^n descritto dall'insieme delle disequazioni di \mathbf{C}_1 che sono verificate da tutti i generatori in \mathbf{G}_2 .*

Questo widening soddisfa le condizioni della Definizione 2.25. Infatti $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_1 \nabla \mathcal{P}_2$, perché le disequazioni di $\mathcal{P}_1 \nabla \mathcal{P}_2$ sono un sottoinsieme di quelle di \mathcal{P}_1 ; inoltre, $\mathcal{P}_2 \subseteq \mathcal{P}_1 \nabla \mathcal{P}_2$ perché tutte le disequazioni scelte sono soddisfatte da tutti i generatori di \mathcal{P}_2 e quindi da tutti i punti \mathbf{x} di \mathcal{P}_2 . Infine, per ogni catena crescente $\mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{P}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{P}_n \subseteq \dots$ la catena $\mathcal{P}'_0 = \mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}'_{i+1} = \mathcal{P}'_i \nabla \mathcal{P}_{i+1}, \dots$ non è strettamente crescente, perché il sistema di disequazioni che descrive \mathcal{P}'_0 ha cardinalità finita e il sistema che definisce \mathcal{P}'_i è un sottoinsieme del sistema di disequazioni che descrive \mathcal{P}'_{i-1} .

Esempio 6.13 Consideriamo i due poliedri rappresentati in Figura 6.3:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1 &= \{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, y = 0 \}, \\ \mathcal{P}_2 &= \{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 2, y \geq 0, y \leq x \}.\end{aligned}$$

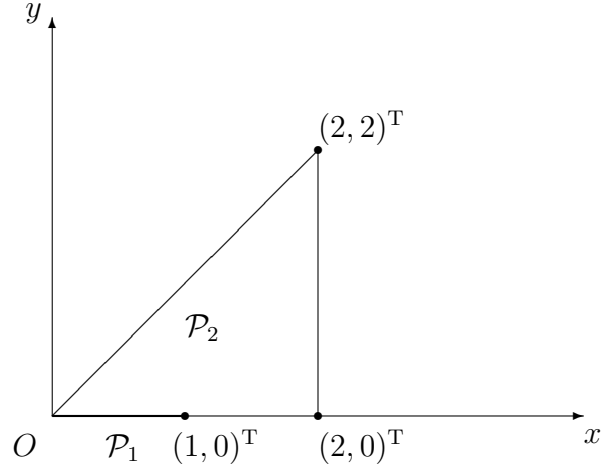


Figura 6.3: Poliedri descritti nell'Esempio 6.13.

I corrispondenti insiemi di vincoli sono:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 &= \{x \geq 0, x \leq 1, y \geq 0, y \leq 0\}, \\ \mathbf{C}_2 &= \{x \leq 2, y \geq 0, y \leq x\}. \end{aligned}$$

L'insieme dei generatori di \mathcal{P}_2 è composto solamente dai vertici $V_1 = (0, 0)^T$, $V_2 = (2, 0)^T$ e $V_3 = (2, 2)^T$. I soli vincoli di \mathbf{C}_1 che sono soddisfatti dai generatori di \mathcal{P}_2 sono $x \geq 0$ e $y \geq 0$; la disequazione $x \leq 1$ non è soddisfatta da V_2 e da V_3 , mentre $y \leq 0$ non è soddisfatta da V_3 : il sistema di vincoli che definisce il poliedro $\mathcal{P}_1 \nabla \mathcal{P}_2$ è quindi

$$\mathbf{C}' = \{x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Il poliedro risultante è

$$\mathcal{P}_1 \nabla \mathcal{P}_2 = \{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0 \},$$

e coincide con \mathbb{R}_+^2 .

N. Halbwachs 1979

Un miglioramento al widening di [CH78] è stato presentato in [Hal79]. Questo stesso operatore di widening è stato successivamente considerato anche in [CC92b, Hal93, HPR94, HPR97].

Definizione 6.14 (Widening di [Hal79]) Siano \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 due poliedri chiusi di \mathbb{R}^n . Sia $\mathbf{C}_1 = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ un sistema di disequazioni minimale tale che $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_1(\mathbf{C}_1)$ e sia $\mathbf{C}_2 = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ un sistema di disequazioni tale che $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_2(\mathbf{C}_2)$. Il poliedro $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \nabla \mathcal{P}_2$ di \mathbb{R}^n è definito dall'insieme di disequazioni $\mathbf{C} = \mathbf{C}'_1 \cup \mathbf{C}'_2$ dove

$$\begin{aligned} \mathbf{C}'_1 &= \{ \beta_i \in \mathbf{C}_1 \mid \mathcal{P}_2 \subseteq \mathcal{P}(\beta_i) \}, \\ \mathbf{C}'_2 &= \left\{ \gamma_i \in \mathbf{C}_2 \mid \exists \beta_j \in \mathbf{C}_1 . \mathcal{P}_1 = \mathcal{P} \left((\mathbf{C}_1 \setminus \{\beta_j\}) \cup \{\gamma_i\} \right) \right\}. \end{aligned}$$

La definizione dell'operatore di widening riportata in [CC92b] e attribuita a [Hal79] è priva della condizione di minimalità del sistema di vincoli \mathbf{C}_1 . Questa condizione, però, è necessaria affinché l'operazione della Definizione 6.14 sia un widening. Introduciamo il seguente esempio per mostrare la necessità della condizione suddetta.

Esempio 6.15 Supponiamo che nella Definizione 6.14 il sistema \mathbf{C}_1 non sia vincolato ad essere in forma minimale e consideriamo per ogni $i \in \mathbb{N}$ i poliedri $\mathcal{P}_i \subseteq \mathbb{R}$ definiti dai sistemi di disequazioni

$$\mathbf{C}_i = \left\{ x \geq 0, x \leq \frac{i}{i+1} \right\} \cup \{x \leq 2\}.$$

Si osserva che il vincolo $x \leq 2$ è ridondante in ogni sistema \mathbf{C}_i . Inoltre la catena crescente formata da questi poliedri è (usando la notazione degli intervalli)

$$\mathcal{P}_0 = [0, 0], \mathcal{P}_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right], \mathcal{P}_2 = \left[0, \frac{2}{3}\right], \dots, \mathcal{P}_n = \left[0, \frac{n}{n+1}\right], \dots$$

e ha per limite l'intervallo $[0, 1)$ (che non fa parte del dominio dei poliedri chiusi).

Si dimostra che la catena $\mathcal{P}'_0 = \mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}'_{n+1} = \mathcal{P}'_n \nabla \mathcal{P}_{n+1}, \dots$ è strettamente crescente, perché per ogni $i \in \mathbb{N}$ si ha $\mathcal{P}'_i = \mathcal{P}_i$. Verifichiamo questa affermazione ragionando per induzione su i . Nel caso $i = 0$ si ha, per definizione, che $\mathcal{P}'_0 = \mathcal{P}_0$ e il sistema di disequazioni che descrive \mathcal{P}'_0 contiene $x \leq 2$. Per dimostrare il passo induttivo, supponiamo che $\mathcal{P}'_{i-1} = \mathcal{P}_{i-1}$ e che la disequazione $x \leq 2$ sia contenuta nel sistema che definisce \mathcal{P}'_{i-1} e dimostriamo che $\mathcal{P}'_i = \mathcal{P}_i$. Le disequazioni $x \geq 0$ e $x \leq 2$ del sistema di \mathcal{P}'_{i-1} sono soddisfatte da tutti i generatori di \mathcal{P}_i e quindi appartengono al sistema di \mathcal{P}'_i . Inoltre, la disequazione $x \leq \frac{i}{i+1}$ di \mathcal{P}_i può essere sostituita a $x \leq 2$ nel sistema di \mathcal{P}'_{i-1} , lasciando questo poliedro invariato. Il sistema che definisce \mathcal{P}'_i è uguale a \mathbf{C}_i , contiene $x \leq 2$ e quindi $\mathcal{P}'_i = \mathcal{P}_i$.

In [HPR97], viene riproposto un algoritmo descritto in [Hal79] per implementare questo operatore di widening. Dati $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_1(\mathbf{C}_1) = \mathcal{P}_1(\mathbf{G}_1)$, con \mathbf{C}_1 in forma minimale e $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_2(\mathbf{C}_2)$, il poliedro $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \nabla \mathcal{P}_2$ è descritto dal sistema di disequazioni $\mathbf{C} = \mathbf{C}'_1 \cup \mathbf{C}'_2$, con

$$\begin{aligned} \mathbf{C}'_1 &= \{ \beta_i \in \mathbf{C}_1 \mid \mathcal{P}_2 \subseteq \mathcal{P}(\beta_i) \}, \\ \mathbf{C}'_2 &= \{ \gamma_i \in \mathbf{C}_2 \mid \exists \beta_j \in \mathbf{C}_1 . S(\gamma_i, \mathbf{G}_1) = S(\beta_j, \mathbf{G}_2) \}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Si osserva che questo algoritmo è corretto solamente nel caso in cui $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2$, perché in caso contrario potrebbe non essere soddisfatta la condizione (2.10). Introduciamo ora un esempio, per evidenziare la necessità di questa condizione.

Esempio 6.16 *Consideriamo in \mathbb{R}^2 i poliedri*

$$\mathcal{P}_1 = \{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 \}$$

e

$$\mathcal{P}_2 = \{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 2 \}.$$

Un sistema di generatori che descrive \mathbf{G}_1 è formato dai vertici $(0, 0)^T$ e $(2, 0)^T$. Dal momento che nessuna disequazione di \mathcal{P}_1 è soddisfatta da tutti i punti di \mathcal{P}_2 , abbiamo $\mathbf{C}'_1 = \emptyset$. Inoltre, la disequazione $y \leq 2$ di \mathcal{P}_2 è saturata solamente dal vertice $(2, 0)^T$: questo è lo stesso comportamento assunto anche dalla disequazione $y \leq 2$ del sistema di \mathcal{P}_1 . Il poliedro risultante $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \nabla \mathcal{P}_2$ è perciò descritto dal sistema composto dalla disequazione $y \geq 2$. Si verifica che \mathcal{P} non soddisfa la condizione (2.10), perché $\mathcal{P}_1 \not\subseteq \mathcal{P}_1 \nabla \mathcal{P}_2$.

È immediato osservare come il widening di [Hal79] sia non meno preciso di quello presentato in [CH78]. Infatti, il sistema di vincoli che si ottiene utilizzando il widening di [CH78] è un sottoinsieme di quello che si ha con l'operazione descritta in [Hal79].

Esempio 6.17 [CC92b, Example 19] *Consideriamo nuovamente i poliedri definiti nell'Esempio 6.13 e calcoliamo il widening di \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 utilizzando la Definizione 6.14. Per quello che abbiamo appena detto l'insieme \mathbf{C}'_1 coincide con l'insieme \mathbf{C}' calcolato nell'Esempio 6.13:*

$$\mathbf{C}'_1 = \mathbf{C}' = \{ x \geq 0, y \geq 0 \}.$$

Dobbiamo solo calcolare l'insieme \mathbf{C}'_2 . Il vincolo $x \geq 0$ può essere sostituito da $x \geq y$ senza modificare \mathcal{P}_1 , perché nell'insieme \mathbf{C}_1 compare il vincolo $y \geq 0$ e quindi abbiamo

$$x \geq y \geq 0.$$

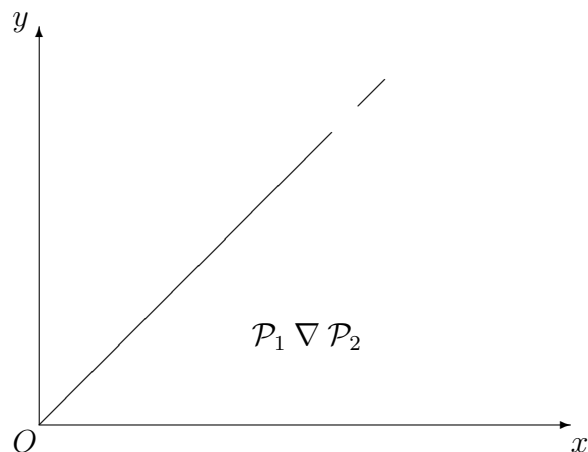


Figura 6.4: Poliedro ottenuto tramite il widening di [Hal79].

La disequazione $y \geq 0$ appartiene sia a \mathbf{C}_1 che a \mathbf{C}_2 , mentre $x \leq 2$ non può sostituire nessun elemento di \mathbf{C}_1 senza modificare \mathcal{P}_1 . L'insieme \mathbf{C}'_2 è quindi

$$\mathbf{C}'_2 = \{x \geq y, y \geq 0\}.$$

Il poliedro determinato dall'insieme di vincoli $\mathbf{C}'_1 \cup \mathbf{C}'_2$, rappresentato in Figura 6.4 è

$$\mathcal{P}_1 \nabla \mathcal{P}_2 = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x\}.$$

Si vede che questo poliedro $\mathcal{P}_1 \nabla \mathcal{P}_2$ fornisce più limitazioni alle variabili. Infatti, mentre nel caso dell'Esempio 6.13 si otteneva solamente che le variabili x e y dovevano essere non negative, in questo caso deve valere anche la disequazione $x \geq y$.

H. Saglam e J. Gallagher 1996

In [SG96] viene proposto un altro widening, che secondo gli autori può essere implementato più efficientemente di quello descritto in [CC92b].

Definizione 6.18 (Widening di [SG96, Section 5.3]) Siano \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 due poliedri chiusi di \mathbb{R}^n definiti rispettivamente dagli insiemi di disequazioni $\mathbf{C}_1 = \{\beta_1, \dots, \beta_k\}$ e $\mathbf{C}_2 = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$. Allora $\mathcal{P}_1 \nabla \mathcal{P}_2$ è il poliedro di \mathbb{R}^n definito dall'insieme $\mathbf{C}'_1 \cup \mathbf{C}'_2$ dove \mathbf{C}'_1 è formato dalle disequazioni $\beta_i \in \mathbf{C}_1$ soddisfatte dalle soluzioni del sistema \mathbf{C}_2 e \mathbf{C}'_2 dalle disequazioni $\gamma_j \in \mathbf{C}_2$ soddisfatte dalle soluzioni del sistema \mathbf{C}_1 e per cui esiste una disequazione $\beta_j \in \mathbf{C}_1$ che è soddisfatta dalle soluzioni di $(\mathbf{C}_1 \setminus \{\beta_j\}) \cup \{\gamma_i\}$.

Si può osservare che nella definizione dell'operatore di widening di [SG96] non viene inserita l'ipotesi di minimalità del sistema \mathbf{C}_1 . Di conseguenza, come abbiamo visto nel caso del widening descritto in [Hal79], anche in questo caso l'operatore non soddisfa la Definizione 2.25. Con l'aggiunta dell'ipotesi mancante i due operatori si dimostrano equivalenti.

Teorema 6.19 *Se il sistema di vincoli che definisce \mathcal{P}_1 è minimale, l'operazione di widening tra \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 presentata nella Definizione 6.18 è equivalente a quella della Definizione 6.14.*

DIMOSTRAZIONE: Siano $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ due poliedri di \mathbb{R}^n descritti rispettivamente dai sistemi di disequazioni \mathbf{C}_i e dai sistemi di generatori \mathbf{G}_i con $i = 1, 2$. Indichiamo con $\mathcal{P}_s = \mathcal{P}_s(\mathbf{C}_s)$ il poliedro ottenuto con la Definizione 6.18 e con $\mathcal{P}_h = \mathcal{P}_h(\mathbf{C}_h)$ quello che si calcola con la Definizione 6.14. Per dimostrare che $\mathcal{P}_h = \mathcal{P}_s$, verifichiamo che $\mathbf{C}_h = \mathbf{C}_s$.

Sia $c \in \mathbf{C}_s$. Possono verificarsi due casi: se c è una disequazione di \mathbf{C}_1 , allora è soddisfatta da tutti i punti che soddisfano il sistema \mathbf{C}_2 e quindi appartiene a \mathbf{C}_h ; altrimenti, se c è una disequazione di \mathbf{C}_2 , allora tutti i punti di \mathcal{P}_1 la soddisfano ed esiste una disequazione $c' \in \mathbf{C}_1$ verificata da tutti i punti che soddisfano il sistema $(\mathbf{C}_1 \setminus \{c'\}) \cup \{c\}$. Questo significa che un punto soddisfa le disequazioni di \mathbf{C}_1 se e solo se soddisfa quelle di $(\mathbf{C}_1 \setminus \{c'\}) \cup \{c\}$ e quindi $c \in \mathbf{C}_h$.

Sia ora $c \in \mathbf{C}_h$. Se c è una disequazione di \mathbf{C}_1 , allora è verificata da tutti i punti di \mathcal{P}_2 e quindi appartiene a \mathbf{C}_s . Se, invece, è una disequazione di \mathbf{C}_2 , allora esiste una disequazione $c' \in \mathbf{C}_1$ tale che il poliedro descritto dal sistema di disequazioni $(\mathbf{C}_1 \setminus \{c'\}) \cup \{c\}$ è ancora \mathcal{P}_1 . Questo significa che tutti i punti che soddisfano le disequazioni di \mathbf{C}_1 verificano anche c e tutti i punti che soddisfano il sistema $(\mathbf{C}_1 \setminus \{c'\}) \cup \{c\}$ soddisfano anche c' : anche in questo caso si ha $c \in \mathbf{C}_s$. \square

La semplificazione dell'algoritmo proposta dagli autori di [SG96] consiste nell'evitare un test di uguaglianza tra poliedri. Si osserva, però, che tale test non viene affatto eseguito nell'algoritmo specificato in (6.2), che quindi è esente da questa presunta inefficienza.

Parma Polyhedra Library 2001

La Parma Polyhedra Library (o, brevemente, PPL) implementa l'operatore di widening della Definizione 6.14, utilizzando, però, un algoritmo leggermente diverso da quello descritto in [Hal79]. L'algoritmo della PPL, oltre a gestire direttamente anche le equazioni, evita il calcolo dell'insieme \mathbf{C}'_1 (si veda la specifica in (6.2)) ottenendo lo stesso risultato. Come era il caso

dell'algoritmo di [Hal79] anche quello della PPL richiede come ipotesi che valga l'inclusione tra i due argomenti.

Definizione 6.20 (Widening di PPL) *Siano \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 due poliedri chiusi di \mathbb{R}^n tali che $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2$. Siano inoltre $\mathbf{K}_1 = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ un sistema di vincoli minimale, \mathbf{G}_1 un sistema di generatori tali che $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_1(\mathbf{K}_1) = \mathcal{P}_1(\mathbf{G}_1)$ e $\mathbf{K}_2 = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ un sistema di vincoli tale che $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_2(\mathbf{K}_2)$. Il poliedro $\mathcal{P}_1 \nabla \mathcal{P}_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ è descritto dall'insieme di vincoli*

$$\mathbf{K}'_2 = \{ \gamma_i \in \mathbf{K}_2 \mid \exists \beta_j \in \mathbf{K}_1 . S(\gamma_i, \mathbf{G}_1) = S(\beta_j, \mathbf{G}_1) \}.$$

Proposizione 6.21 *Siano \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 due poliedri chiusi di \mathbb{R}^n tali che $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2$. Sia $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_1(\mathbf{K}_1)$, con \mathbf{K}_1 un sistema di vincoli minimale. Se \mathcal{P}_h è il poliedro $\mathcal{P}_1 \nabla \mathcal{P}_2$, con ∇ l'operazione specificata in (6.2) e \mathcal{P}_p è il poliedro $\mathcal{P}_1 \nabla \mathcal{P}_2$, con ∇ l'operazione della Definizione 6.20, allora $\mathcal{P}_h = \mathcal{P}_p$.*

DIMOSTRAZIONE: Sia \mathbf{K}_2 un sistema di vincoli che definisce il poliedro \mathcal{P}_2 e \mathbf{G}_1 un sistema di generatori tale che $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_1(\mathbf{G}_1)$. Con \mathbf{C}_i indichiamo l'insieme di disequazioni che derivano da \mathbf{K}_i , cioè

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_i = & \{ \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \geq b \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \geq b \in \mathbf{K}_i \} \\ & \cup \{ \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \geq b, -\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \geq -b \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = b \in \mathbf{K}_i \}, \end{aligned}$$

con $i = 1, 2$. Dobbiamo dimostrare che $\mathcal{P}_h = \mathcal{P}_p$.

Siano \mathbf{C}'_i con $i = 1, 2$ i sistemi di disequazioni che si ottengono con la (6.2) e sia \mathbf{K}'_2 il sistema di vincoli ottenuto dalla Definizione 6.20. Dimostriamo che il sistema \mathbf{K}'_2 corrisponde a \mathbf{C}'_2 . Sia γ_i una disequazione di \mathbf{K}'_2 . Essendo una disequazione di \mathbf{K}_2 , si ha che $\gamma_i \in \mathbf{C}_2$ e dal momento che la condizione che definisce il sistema \mathbf{K}'_2 è la stessa che definisce il sistema \mathbf{C}'_2 in (6.2), si ha che $\gamma_i \in \mathbf{C}'_2$. Se, invece, γ_i è un'equazione, allora in \mathbf{C}_2 esistono due disequazioni γ_i^+ e γ_i^- che derivano dall'equazione γ_i . Si osserva che se γ_i è un'equazione, allora è saturata da tutti i generatori di \mathcal{P}_1 e quindi anche γ_i^+ e γ_i^- godono di questa proprietà. Per come è definito l'insieme \mathbf{K}'_2 esiste un vincolo β_j di \mathcal{P}_1 tale che $S(\gamma_i, \mathbf{G}_1) = S(\beta_j, \mathbf{G}_1) = \mathbf{G}_1$; questo implica che anche β_j è un'equazione, perché \mathbf{K}_1 è in forma minimale. In \mathbf{C}_1 esistono due disequazioni β_j^+ e β_j^- che derivano da β_j e che sono saturate da tutti i generatori di \mathbf{G}_1 . Si ha perciò che γ_i^+ e γ_i^- appartengono a \mathbf{C}'_2 , perché $S(\gamma_i^+, \mathbf{G}_1) = S(\gamma_i^-, \mathbf{G}_1) = S(\beta_j^+, \mathbf{G}_1)S(\beta_j^-, \mathbf{G}_1) = \mathbf{G}_1$.

Consideriamo ora la disequazione γ_i di \mathbf{C}'_2 . Per definizione, esiste una disequazione β_j in \mathbf{C}_1 tale che $S(\gamma_i, \mathbf{G}_1) = S(\beta_j, \mathbf{G}_1)$. Se $S(\beta_j, \mathbf{G}_1) = \mathbf{G}_1$, allora nel sistema \mathbf{K}_1 esiste un'equazione β'_j da cui è derivata β_j . Inoltre, $S(\gamma_i, \mathbf{G}_1) = \mathbf{G}_1$ e quindi esiste un vincolo γ'_i da cui è derivata γ_i ed è tale che

$S(\gamma'_i, \mathbf{G}_1) = \mathbf{G}_1$. Quindi $S(\gamma'_i, \mathbf{G}_1) = S(\beta'_j, \mathbf{G}_1) = \mathbf{G}_1$ e $\gamma'_j \in \mathbf{K}'_2$. Se invece $S(\beta_j, \mathbf{G}_1) \neq \mathbf{G}_1$, allora β_j e γ_i sono disequazioni di \mathbf{K}_1 e \mathbf{K}_2 rispettivamente. Si ha perciò che $\gamma_i \in \mathbf{K}'_2$.

Sia ora β_j una disequazione di \mathbf{C}'_1 . Allora per definizione β_j è soddisfatta da tutti i generatori di \mathcal{P}_2 . Se β_j è tale che $S(\beta_j, \mathbf{G}_1) = \mathbf{G}_1$, allora in \mathbf{K}_1 esiste un'equazione β'_j corrispondente. Ciò significa che anche \mathcal{P}_2 appartiene all'iperpiano definito dall'equazione β'_j . In \mathbf{K}_2 esiste perciò almeno un'equazione o una coppia di disequazioni che definiscono questo iperpiano. In entrambi i casi, l'equazione o le due disequazioni appartengono al sistema \mathbf{K}'_2 . Se, invece, $S(\beta_j, \mathbf{G}_1) \neq \mathbf{G}_1$, β_j descrive una faccetta F_1 di \mathcal{P}_1 , perché \mathbf{C}_1 è in forma minimale. Inoltre, per l'ipotesi che $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2$, la faccetta F_1 è contenuta in una faccetta F_2 di \mathcal{P}_2 . Se γ_i è il vincolo di \mathbf{C}_2 che genera la faccetta F_2 , allora si ha $S(\gamma_i, \mathbf{G}_1) = S(\beta_j, \mathbf{G}_1)$, perché ogni $\mathbf{x} \in F_1$ satura β_j e dovendo appartenere anche a F_2 satura anche γ_i . La disequazione γ_i appartiene a \mathbf{C}'_2 e per quello che abbiamo già dimostrato esiste un vincolo che corrisponde a γ_i in \mathbf{K}'_2 . \square

F. Besson, T. Jensen e J. Talpin 1999

In [BJT99] viene presentato un operatore che gli autori sostengono essere un widening che fornisce risultati più precisi di quello proposto in [Hal93] (che è lo stesso di [Hal79]). Mentre gli operatori di widening introdotti precedentemente costruiscono il poliedro risultato scegliendo alcune disequazioni dei due poliedri argomenti, nell'operatore definito in [BJT99] il risultato viene specificato utilizzando i generatori di tali poliedri, eventualmente considerando nuovi generatori ottenuti da opportune combinazioni di quelli esistenti: per questo motivo gli autori parlano di operatore basato sull'involuppo convesso (*convex-hull based widening*).

La convergenza dell'operatore proposto si basa sul seguente teorema che è una leggera variante di [BJT99, Section 6.1, Theorem 3]¹:

Teorema 6.22 *Sia $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \dots \subset \mathcal{P}_n \subset \dots$ una catena crescente di poliedri di \mathbb{R}^n . Se per ogni $i \geq 0$ vale una delle seguenti condizioni:*

- $\dim(\mathcal{P}_i) < \dim(\mathcal{P}_{i+1})$,
- $\dim(\mathcal{P}_i) = \dim(\mathcal{P}_{i+1}) \wedge \dim(\text{lin.space}(\mathcal{P}_i)) < \dim(\text{lin.space}(\mathcal{P}_{i+1}))$,
- $\dim(\mathcal{P}_i) = \dim(\mathcal{P}_{i+1}) \wedge \dim(\text{lin.space}(\mathcal{P}_i)) = \dim(\text{lin.space}(\mathcal{P}_{i+1})) \wedge v_{\mathcal{P}_i} > v_{\mathcal{P}_{i+1}}$, dove $v_{\mathcal{P}_i}$ indica il numero di punti necessari alla rappresentazione del poliedro \mathcal{P}_i ,

¹Il teorema 6.22 è stato riformulato rispetto a quello proposto in [BJT99] per tenere conto di alcune modifiche e correzioni suggerite dagli stessi autori.

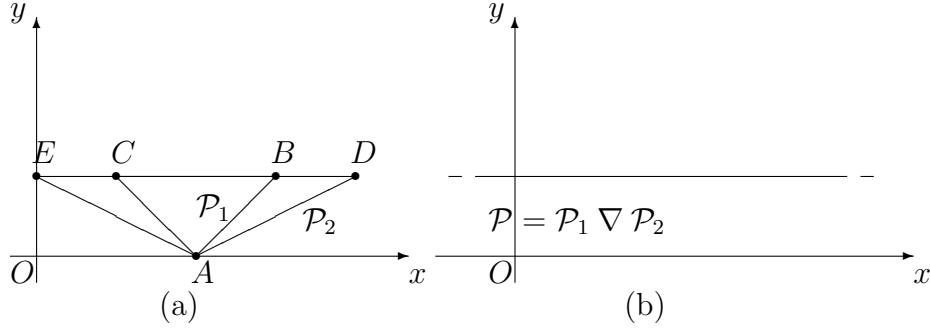


Figura 6.5: (a) I due poliedri \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 . (b) Il poliedro $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \nabla \mathcal{P}_2$.

allora la catena ha lunghezza finita.

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo la catena crescente $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \dots \subset \mathcal{P}_n \subset \dots$ tale che per ogni $i \geq 0$ valga una delle condizioni espresse nel teorema. Questa catena deve avere lunghezza finita, perché le dimensioni di ogni poliedro e del rispettivo lineality space devono essere minori o uguali a n , e il numero di punti necessari alla rappresentazione parametrica di un poliedro non vuoto è sempre finita e maggiore o uguale a 1. \square

L'operatore definito in [BJT99] è ottenuto dalla composizione di due differenti tecniche che, in linea di principio, dovrebbero garantire che ogni catena crescente di poliedri chiusi venga trasformata in un'altra catena che verifica le condizioni del Teorema 6.22. Intuitivamente, dati due poliedri \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 , se la dimensione del secondo è maggiore della dimensione del primo non occorre fare nulla; altrimenti, si applica una delle due tecniche con l'intento di diminuire il numero di punti e/o aumentare il numero di rette necessari alla rappresentazione del poliedro.

Dato un vettore $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, indichiamo $\hat{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^n$ il vettore ottenuto normalizzando \mathbf{a} : le coordinate di $\hat{\mathbf{a}}$ sono calcolate dividendo le coordinate di \mathbf{a} per il loro massimo comune divisore.

Definizione 6.23 (Prima tecnica di widening di [BJT99]) Siano \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 due poliedri chiusi di \mathbb{R}^n tali che $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2$. Per ogni $i = 1, 2$, si considerino il sistema di generatori $\mathbf{G}_i = (L_i, R_i, V_i)$ ed il sistema di disequazioni \mathbf{C}_i tali che $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i(\mathbf{G}_i) = \mathcal{P}_i(\mathbf{C}_i)$. Il poliedro $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \nabla \mathcal{P}_2$ è definito dal sistema di disequazioni $\mathbf{C} = (\mathbf{C}_1 \cap \mathbf{C}_2) \cup \mathbf{C}'$, dove

$$\mathbf{C}' = \{ \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \geq b \mid \exists \mathbf{v} \in V_1 \cap V_2 \cdot \mathbf{a} = \sum_{\mathbf{a}_i \in \mathbf{C}_v} \mathbf{a}_i, b = \langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle \},$$

con $\mathbf{C}_v = \{ \hat{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^n \mid \exists (\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \geq b) \in \mathbf{C}_2 \setminus \mathbf{C}_1 \cdot \langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle = b \}$.

Esempio 6.24 Forniamo ora un esempio della tecnica appena proposta.

Siano \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 due poliedri di \mathbb{R}^2 presentati in Figura 6.5(a). Il primo poliedro è descritto dai vertici $A = (2,0)$, $B = (3,1)$ e $C = (1,1)$, mentre il secondo dai vertici $A = (2,0)$, $D = (4,1)$ e $E = (0,1)$; il sistema di disequazioni di \mathcal{P}_1 è formato da $y \leq 1$, $x + y \geq 2$ e $x - y \leq 2$, mentre quello di \mathcal{P}_2 è formato da $y \leq 1$, $x + 2 \cdot y \geq 2$ e $x - 2 \cdot y \leq 2$.

L'insieme delle disequazioni comuni a entrambi i sistemi contiene solamente la disequazione $y \leq 1$, mentre l'unico vertice comune ai due poliedri è A e le disequazioni di $\mathbf{C}_2 \setminus \mathbf{C}_1$ che sono saturate da A sono $x + y \geq 2$ e $x - y \leq 2$. Normalizzando i vettori $(1,1)$ e $(-1,1)$, sommandoli e imponendo il passaggio per A otteniamo che la nuova disequazione è $y \geq 0$.

Il poliedro risultante è perciò descritto dai vincoli $0 \leq y \leq 1$ ed è rappresentato in Figura 6.5(b).

Con la seconda tecnica proposta in [BJT99], che dà il nome al metodo, si sostituiscono i punti del sistema di generatori di \mathcal{P}_{i+1} con dei raggi passanti per i punti del sistema di generatori di \mathcal{P}_i .

Definizione 6.25 (Seconda tecnica di widening di [BJT99]) Siano \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 due poliedri chiusi di \mathbb{R}^n tali che $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2$. Per ogni $i = 1, 2$, si considerino il sistema di generatori $\mathbf{G}_i = (L_i, R_i, V_i)$ ed il sistema di disequazioni \mathbf{C}_i tali che $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i(\mathbf{G}_i) = \mathcal{P}_i(\mathbf{C}_i)$. Il poliedro $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \nabla \mathcal{P}_2$ è descritto dal sistema di generatori $\mathbf{G} = (L_2, R_2 \cup R'', V_2)$, dove

$$R'' = \left\{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} \forall \mathbf{v} \in V_1 \cup V_2, \forall \mathbf{v}' \in V_2 \setminus (V_1 \cup \{\mathbf{v}\}) : \mathbf{r} = \mathbf{v} - \mathbf{v}' \\ e \forall (\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \geq b) \in \mathbf{C}_1 \cap \mathbf{C}_2 : \langle \mathbf{a}, \mathbf{r} \rangle \geq 0 \end{array} \right. \right\}.$$

Un miglioramento a questa tecnica consiste nell'aggiungere all'insieme \mathbf{G} solamente il raggio \mathbf{r} che ha per direzione la media di tutti i raggi di R'' .

Esempio 6.26 Consideriamo i poliedri dell'Esempio 6.24 e consideriamo la tecnica appena descritta per calcolare il widening di \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 .

L'insieme V_1 dei vertici di \mathcal{P}_1 è formato da A , B e C , mentre V_2 da A , D ed E : i vertici di \mathcal{P}_2 che non appartengono a \mathcal{P}_1 sono D ed E .

Sia $D = (4,1)$ il primo punto che consideriamo; con $\mathbf{v}' = (3,1)$ o con $\mathbf{v}' = (1,1)$ otteniamo il raggio di direzione $(1,0)$ che soddisfa il vincolo $y \leq 0$, mentre con $\mathbf{v}' = (2,0)$ il raggio di direzione $(-3,1)$ che viola il vincolo $y \leq 0$. Il raggio che viene aggiunto in questo caso è perciò quello di direzione $(1,0)$.

Se invece il punto che consideriamo è $E = (0,1)$, l'unico raggio che otteniamo è quello di direzione $(-1,0)$ usando i punti B e C .

Il poliedro $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \nabla \mathcal{P}_2$ è perciò quello in Figura 6.5 ed è descritto da un retta di direzione $(1,0)$ e da due punti che possono essere A e B .

L'utilizzo delle due tecniche descritte in [BJT99] può portare a risultati più precisi di quelli ottenuti con i widening di [CH78] e di [Hal79]. Ad esempio, se consideriamo i poliedri dell'Esempio 6.24, i widening descritti precedentemente davano come risultato il poliedro $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \nabla \mathcal{P}_2$ descritto dalla disequazione $y \leq 1$. Inoltre, consideriamo in \mathbb{R}^3 come poliedro \mathcal{P}_1 un quadrato e come poliedro \mathcal{P}_2 un cubo tale che $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2$. Mentre l'operatore di [BJT99] ottiene come risultato il cubo stesso, perché la dimensione del quadrato è uguale a 2 e quella del cubo è 3, i widening precedenti davano come risultato una semi-colonna di base quadrata se \mathcal{P}_1 coincideva con una faccia di \mathcal{P}_2 oppure una colonna di base quadrata.

Nonostante questi esempi, mancando risultati formali al proposito, non è noto se tale operatore sia *uniformemente* più preciso dei widening suddetti: potrebbero infatti esistere altri esempi per i quali l'operatore di [BJT99] risulti meno preciso. Inoltre, si dimostra che tale operatore, per come è stato definito, non è un vero e proprio operatore di widening, in quanto non soddisfa la condizione (2.11). Infatti se consideriamo, per ogni $i \in \mathbb{N}$, il poliedro $\mathcal{P}_i \subseteq \mathbb{R}^2$ descritto dal vertice $(0, 0)^T$ e dai due raggi $(1, 0)^T$ e $(1, i)^T$, il poliedro $\mathcal{P}'_{i+1} = \mathcal{P}'_i \nabla \mathcal{P}_{i+1}$ è sempre uguale a \mathcal{P}_{i+1} e perciò la catena formata dai poliedri \mathcal{P}'_i è strettamente crescente. Contrariamente a quanto lasciato intendere in [BJT99], l'uso combinato delle due tecniche descritte non è sufficiente a garantire la validità delle ipotesi del Teorema 6.22. In ogni caso, in virtù dell'Osservazione 2.27, è sempre possibile modificare la definizione dell'operatore per fare in modo che soddisfi la condizione (2.11).

Per quello che abbiamo osservato, alcuni operatori di widening forniscono risultati più precisi di altri: questa differenza è rappresentata nel grafico di Figura 6.6, dove ogni freccia indica il passaggio da un widening che fornisce un risultato meno preciso ad uno che restituisce un risultato più preciso. Per l'operatore [BJT99], gli unici risultati noti sono che esso è diverso da tutti gli altri e, in particolare, non è uniformemente meno preciso degli altri. Ciò vuol dire che nella Figura 6.6 non può esservi nessuna freccia dall'operatore di [BJT99] verso gli altri, mentre potrebbero esservi le frecce nel senso opposto.

6.1.10 Widening limitato

L'operazione di *widening limitato* è stata introdotta in [Hal93].

Definizione 6.27 (Widening limitato) *Siano \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 due poliedri di \mathbb{R}^n e sia \mathbf{C} un sistema di vincoli di \mathbb{R}^n . Si definisce widening limitato a \mathbf{C} e si indica con $\mathcal{P}_1 \nabla_{\mathbf{C}} \mathcal{P}_2$ l'intersezione del poliedro $\mathcal{P}_1 \nabla \mathcal{P}_2$ con tutti i vincoli di \mathbf{C} soddisfatti dai generatori dei due poliedri.*

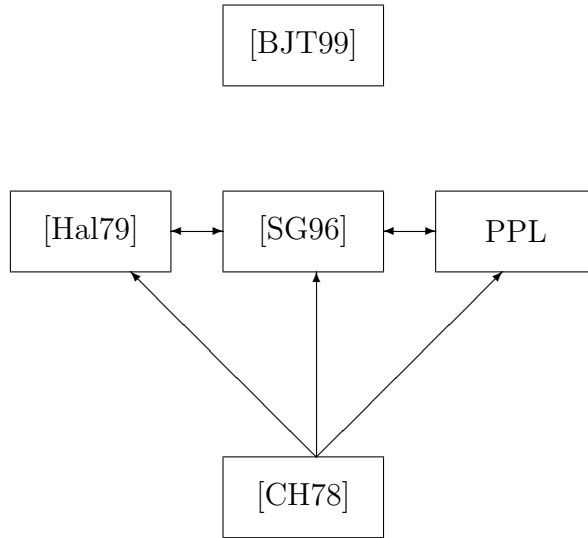


Figura 6.6: Confronto tra le tecniche di widening proposte.

Questo widening è utile nel caso in cui si vuole calcolare il widening tra due poliedri sapendo però che questo deve essere contenuto nella parte di spazio delimitata dai vincoli di \mathbf{C} soddisfatti dai generatori di entrambi i poliedri.

Esempio 6.28 Consideriamo i poliedri di \mathbb{R}^2

$$\mathcal{P}_1 = \{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, x \leq 1, x - y \geq 0 \},$$

$$\mathcal{P}_2 = \{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, x \leq 2, x - y \geq 0 \}$$

e come sistema di vincoli \mathbf{C} quello formato da

$$y \leq 3.$$

Si ottiene che il poliedro risultante dall'operazione di widening della Definizione 6.20 è il seguente:

$$\mathcal{P}_1 \nabla \mathcal{P}_2 = \{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, x - y \geq 0 \}.$$

Il vincolo $y \leq 3$ è soddisfatto dai generatori di \mathcal{P}_1 e di \mathcal{P}_2 . Quindi considerando la definizione di questa operazione il poliedro risultante è il seguente:

$$\mathcal{P} = \{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y \geq 0, y \leq 3 \}.$$

Questo nuovo poliedro è rappresentato nella Figura 6.7

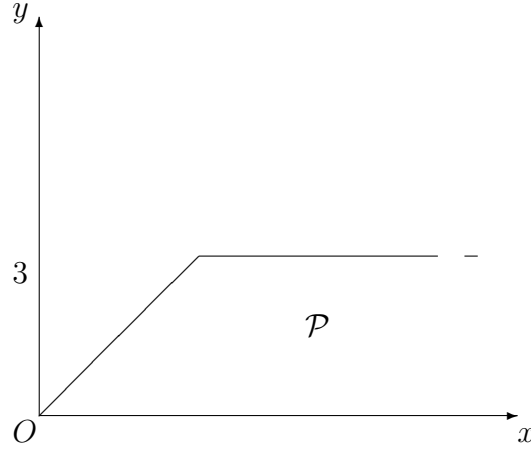


Figura 6.7: Poliedro $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \nabla_{\mathbf{C}} \mathcal{P}_2$.

6.1.11 Time-elapse

L'operatore di *time-elapse* è stato introdotto in [HPR94, HPR97].

Definizione 6.29 (Time-elapse) *Siano $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ due poliedri chiusi (resp., NNC) di \mathbb{R}^n . Si definisce time-elapse di \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 e si indica con $\mathcal{P}_1 \nearrow \mathcal{P}_2$ il più piccolo poliedro chiuso (resp., NNC) che contiene l'insieme*

$$P = \{ \mathbf{x} + t\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \in \mathcal{P}_1, \mathbf{y} \in \mathcal{P}_2, t \in \mathbb{R}_+ \}.$$

Si osserva che se il poliedro \mathcal{P}_1 o \mathcal{P}_2 è vuoto, allora $\mathcal{P}_1 \nearrow \mathcal{P}_2$ è vuoto.

Inoltre, in [HPR97], viene presentato un metodo per calcolare il poliedro $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \nearrow \mathcal{P}_2$ nel caso in cui entrambi i poliedri siano chiusi: se $\mathbf{G}_i = (L_i, R_i, V_i)$ è il sistema di generatori di \mathcal{P}_i con $i = 1, 2$, il poliedro \mathcal{P} è descritto dal sistema $\mathbf{G} = (L_1 \cup L_2, R_1 \cup R_2 \cup V_2, V_1)$. Si dimostra che questo metodo consente di formare un poliedro che contiene l'insieme P . Infatti, se

$\mathbf{z} = \mathbf{x} + t\mathbf{y}$ è un punto di P , allora questo si può scrivere come

$$\begin{aligned}
\mathbf{z} &= \mathbf{x} + t\mathbf{y} \\
&= \sum_{\mathbf{l}_{1_i} \in L_1} \lambda_{1_i} \mathbf{l}_{1_i} + \sum_{\mathbf{r}_{1_i} \in R_1} \mu_{1_i} \mathbf{r}_{1_i} + \sum_{\mathbf{v}_{1_i} \in V_1} \nu_{1_i} \mathbf{v}_{1_i} \\
&\quad + t \left(\sum_{\mathbf{l}_{2_i} \in L_2} \lambda_{2_i} \mathbf{l}_{2_i} + \sum_{\mathbf{r}_{2_i} \in R_2} \mu_{2_i} \mathbf{r}_{2_i} + \sum_{\mathbf{v}_{2_i} \in V_2} \nu_{2_i} \mathbf{v}_{2_i} \right) \\
&= \sum_{\mathbf{l}_{1_i} \in L_1} \lambda_{1_i} \mathbf{l}_{1_i} + \sum_{\mathbf{r}_{1_i} \in R_1} \mu_{1_i} \mathbf{r}_{1_i} + \sum_{\mathbf{v}_{1_i} \in V_1} \nu_{1_i} \mathbf{v}_{1_i} \\
&\quad + \sum_{\mathbf{l}_{2_i} \in L_2} t\lambda_{2_i} \mathbf{l}_{2_i} + \sum_{\mathbf{r}_{2_i} \in R_2} t\mu_{2_i} \mathbf{r}_{2_i} + \sum_{\mathbf{v}_{2_i} \in V_2} t\nu_{2_i} \mathbf{v}_{2_i},
\end{aligned}$$

con $t \in \mathbb{R}_+$, $\lambda_{j_i} \in \mathbb{R}$, $\mu_{j_i}, \nu_{j_i} \in \mathbb{R}_+$ e $\sum \nu_{j_i} = 1$ per ogni $j = 1, 2$. Con opportune sostituzioni, il punto $\mathbf{z} \in P$ si può scrivere come:

$$\begin{aligned}
\mathbf{z} &= \sum_{\mathbf{l}_{1_i} \in L_1} \lambda_{1_i} \mathbf{l}_{1_i} + \sum_{\mathbf{l}_{2_i} \in L_2} \hat{\lambda}_i \mathbf{l}_{2_i} + \sum_{\mathbf{r}_{1_i} \in R_1} \mu_{1_i} \mathbf{r}_{1_i} \\
&\quad + \sum_{\mathbf{r}_{2_i} \in R_2} \hat{\mu}_i \mathbf{r}_{2_i} + \sum_{\mathbf{v}_{1_i} \in V_1} \nu_{1_i} \mathbf{v}_{1_i} + \sum_{\mathbf{v}_{2_i} \in V_2} \hat{\nu}_i \mathbf{v}_{2_i} \\
&= \sum_{\mathbf{l}_i \in L_1 \cup L_2} \lambda_i \mathbf{l}_i + \sum_{\mathbf{r}_i \in R_1 \cup R_2 \cup V_2} \mu_i \mathbf{r}_i + \sum_{\mathbf{v}_i \in V_1} \nu_i \mathbf{v}_i.
\end{aligned}$$

Infatti, moltiplicando per $t \in \mathbb{R}_+$ la combinazione lineare delle rette e quella positiva dei raggi di \mathcal{P}_2 , si ottiene rispettivamente una combinazione lineare e una combinazione positiva; moltiplicando per $t \in \mathbb{R}_+$ la combinazione convessa dei punti di \mathcal{P}_2 , invece, si ottiene una combinazione positiva e quindi i punti si trasformano in raggi nel poliedro risultante.

Si osserva che in questo caso il poliedro chiuso risultante coincide con l'insieme P della Definizione 6.29.

Esempio 6.30 Siano $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ due poliedri descritti rispettivamente dai sistemi di generatori

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_1 &= (\emptyset, \emptyset, \{(0, 0)^T, (0, 1)^T, (1, 0)^T\}) \\
\mathbf{G}_2 &= (\emptyset, \emptyset, \{(2, 2)^T, (3, 2)^T\}).
\end{aligned}$$

Il poliedro risultante $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \nearrow \mathcal{P}_2$ è descritto dal sistema di generatori

$$\begin{aligned}
\mathbf{G} &= (\emptyset, \{(2, 2)^T, (3, 2)^T\}, \{(0, 0)^T, (0, 1)^T, (1, 0)^T\}) \\
&= (\emptyset, \{(1, 1)^T, (3, 2)^T\}, \{(0, 0)^T, (0, 1)^T, (1, 0)^T\})
\end{aligned}$$

ed è rappresentato in Figura 6.8.

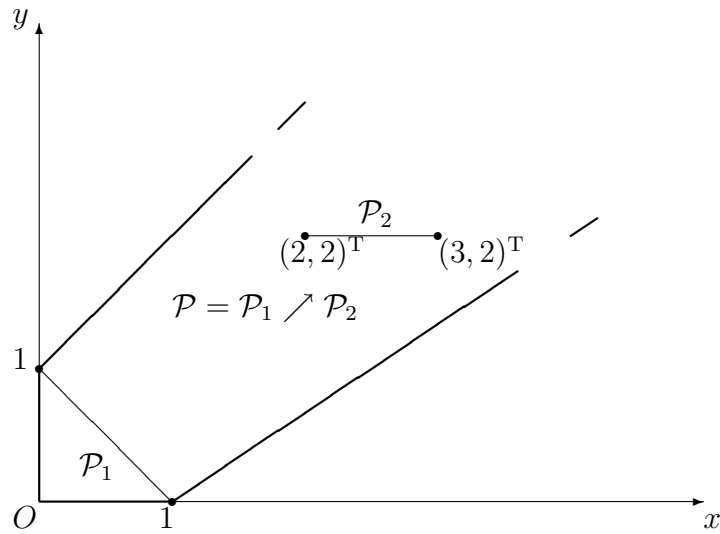


Figura 6.8: Poliedro $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \nearrow \mathcal{P}_2$.

Se i poliedri \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 sono NNC, definiti dal sistema di generatori $\mathbf{G}_i = (L_i, R_i, V_i, C_i)$, con $i = 1, 2$, il sistema di generatori che descrive $\mathcal{P}_1 \nearrow \mathcal{P}_2$ è $\mathbf{G} = (L_1 \cup L_2, R_1 \cup R_2 \cup V_2 \cup C_2, V_1, C_1)$. È quindi necessario considerare come raggi del nuovo poliedro, oltre agli elementi di R_1 e R_2 , anche i punti e i punti di chiusura di \mathcal{P}_2 .

Si osserva che nel caso dei poliedri NNC l'insieme P della Definizione 6.29 non è un poliedro e quindi è necessario considerare come risultato dell'operazione il più piccolo poliedro che lo contiene.

Esempio 6.31 Consideriamo in \mathbb{R}^2 il poliedro NNC $\mathcal{P}_1 = \{\mathbf{0}\}$ e il poliedro NNC \mathcal{P}_2 descritto dal sistema di generatori

$$\mathbf{G}_2 = (\emptyset, \emptyset, \{(2, 2)^T\}, \{(1, 2)^T, (3, 2)^T\}).$$

Il poliedro $\mathcal{P}_1 \nearrow \mathcal{P}_2$ è descritto dal sistema di generatori

$$\mathbf{G} = (\emptyset, \{(2, 2)^T, (1, 2)^T, (3, 2)^T\}, \{(0, 0)^T\}, \{(0, 0)^T\}).$$

6.1.12 Chiusura di un poliedro

L'operazione di chiusura di un poliedro è un'operazione utile solo nel caso di poliedri NNC. Se un poliedro NNC è descritto utilizzando la rappresentazione implicita, allora

Proposizione 6.32 *Sia $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro NNC non vuoto tale che*

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, C_1\mathbf{x} \geq d_1, C_2\mathbf{x} > d_2\}.$$

Allora,

$$\mathbb{C}(\mathcal{P}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, C_1\mathbf{x} \geq d_1, C_2\mathbf{x} \geq d_2\}.$$

DIMOSTRAZIONE: Indichiamo con I l'insieme

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, C_1\mathbf{x} \geq d_1, C_2\mathbf{x} \geq d_2\}.$$

Se $\mathbf{c} \in \mathbb{C}(\mathcal{P})$, allora deve appartenere alle chiusure di tutti i semispazi e gli iperpiani che lo definiscono. Quindi, \mathbf{c} soddisfa tutte le equazioni e le disequazioni non-strette, perché gli insiemi da loro descritti sono chiusi e per il Lemma 5.3, si ha $C_2\mathbf{c} \geq d_2$, da cui segue che $\mathbf{c} \in I$.

Viceversa, sia $\mathbf{c} \in I$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $0 < \lambda < 1$. Per ogni $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$, il punto $\bar{\mathbf{p}} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda\mathbf{p} + (1 - \lambda)\mathbf{c}$ appartiene a \mathcal{P} . Infatti, dal momento che $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ e $\mathbf{c} \in I$, allora ogni loro combinazione convessa soddisfa i vincoli dell'insieme I . Inoltre, si osserva che

$$C_2\bar{\mathbf{p}} = \lambda C_2\mathbf{p} + (1 - \lambda)C_2\mathbf{c} > \lambda d_2 + (1 - \lambda)d_2 = d_2,$$

perché abbiamo supposto che $\lambda \neq 0$. Allora, per la Proposizione 5.4, si ha che $\mathbf{c} \in \mathbb{C}(\mathcal{P})$. \square

6.2 Uso della ε -rappresentazione per le operazioni dei poliedri NNC

Nella sezione precedente, abbiamo visto come alcune delle operazioni sui poliedri chiusi possano essere facilmente estese al caso dei poliedri NNC, a patto di essere in grado di manipolare le rappresentazioni che fanno uso di sistemi di vincoli misti e di sistemi di generatori estesi. In realtà, siccome l'algoritmo di Chernikova opera solamente sui poliedri topologicamente chiusi, non è possibile operare direttamente sui poliedri NNC, ma occorre necessariamente fare riferimento ad una delle loro ε -rappresentazioni. In pratica, la specifica dell'operazione sul poliedro NNC deve essere tradotta in una corrispondente specifica per un'operazione che possa essere eseguita sulla sua ε -rappresentazione. In alcuni casi, ed in particolar modo quando tale rappresentazione non viene modificata dall'applicazione dell'operatore considerato, tale corrispondenza è immediata.

Per esempio, nel caso dell'operazione che controlla se un poliedro NNC $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ è diverso dall'insieme vuoto, dobbiamo controllare se il corrispondente sistema di generatori esteso contiene almeno un punto di \mathcal{P} , mentre in realtà abbiamo a disposizione il sistema di generatori di $\mathcal{Q} \Rightarrow_\epsilon \mathcal{P}$, dove $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\mathbf{G}) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Per quanto visto nel Capitolo 5, i punti del poliedro NNC \mathcal{P} corrispondono ai punti di \mathcal{Q} che hanno coordinata ϵ positiva, mentre quelli che hanno coordinata ϵ nulla sono punti di chiusura di \mathcal{P} . È pertanto sufficiente controllare che il sistema di generatori \mathbf{G} di \mathcal{Q} contenga un punto con la coordinata ϵ maggiore di zero.

Una situazione analoga si presenta per il test di inclusione tra due poliedri NNC, per il quale, come osservato nella sezione precedente, è sufficiente verificare se ogni generatore del primo poliedro soddisfa i vincoli del secondo poliedro. Come detto, osservando i vincoli ed i generatori delle corrispondenti ϵ -rappresentazioni è facile stabilire se essi corrispondono a disequazioni strette o punti di chiusura e, da questo, stabilire quale è la condizione che devono verificare.

Diversa è la situazione per quegli operatori che come risultato producono un nuovo poliedro NNC, come è il caso per l'intersezione, l'involuppo poliedrale e le trasformazioni affini. In questo caso occorre assicurarsi che la corrispondente operazione sulle ϵ -rappresentazioni mantenga tutte le proprietà enunciate nella Definizione 5.5. In questa sezione, quindi, mostriamo alcuni risultati formali di correttezza per tali operazioni.

Per cominciare, si enunciano e dimostrano alcuni lemmi tecnici che saranno utili nelle dimostrazioni seguenti.

Lemma 6.33 *Sia $\mathbf{G} = (L, R, V, C)$ un sistema di generatori di \mathbb{R}^n tale che $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbf{G})$ è un poliedro NNC non vuoto di \mathbb{R}^n e siano $L' = \{(\mathbf{l}^T, 0)^T \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{l} \in R\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ e $R' = \{(\mathbf{r}^T, 0)^T \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{r} \in R\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Allora, se $\mathcal{Q} \Rightarrow_\epsilon \mathcal{P}$, esiste $Q \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ tale che $\mathbf{G}' = (L', R', Q)$ tale che $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\mathbf{G}')$.*

DIMOSTRAZIONE: Poiché $Q \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ è chiuso, per il Teorema 3.57, esistono gli insiemi finiti $T', S', Q \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ tali che $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}((T', S', Q))$. Per il Lemma 5.8, se $(\mathbf{t}^T, e_t)^T \in T'$ e $(\mathbf{s}^T, e_s)^T \in S'$, allora $e_t = e_s = 0$. Siano h, k, m e ℓ le cardinalità di L', R', T' e S' , rispettivamente e definiamo

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n \mid (\mathbf{t}^T, 0)^T \in T' \},$$

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n \mid (\mathbf{s}^T, 0)^T \in S' \}.$$

Consideriamo $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^h$ e $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}_+^k$. Poiché $\mathcal{P} = \mathcal{P}((L, R, V, C))$, se $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$, allora $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \sum_{i=1}^h \lambda_i \mathbf{l}_i + \sum_{i=1}^k \mu_i \mathbf{r}_i \in \mathcal{P}$, con $\mathbf{l}_i \in L$ e $\mathbf{r}_i \in R$. Allora, per le condizioni (5.3) e (5.4), abbiamo che $(\mathbf{v}^T, 0)^T = (\mathbf{x}^T, 0)^T + \sum_{i=1}^h \lambda_i \mathbf{l}'_i +$

$\sum_{i=1}^k \mu_i \mathbf{r}'_i \in \mathcal{Q}$, con $\mathbf{l}'_i \in L'$ e $\mathbf{r}'_i \in R'$. Poiché vale per ogni $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^h$ e per ogni $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}_+^h$, allora L' e R' sono rispettivamente un insieme di rette e di raggi di \mathcal{Q} tali che $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}((T' \cup L', S' \cup R', Q))$.

Consideriamo ora $\boldsymbol{\lambda}' \in \mathbb{R}^m$ e $\boldsymbol{\mu}' \in \mathbb{R}_+^\ell$. Poiché $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}((T', S', Q))$, se $(\mathbf{x}^T, e)^T \in \mathcal{Q}$ ed $e > 0$, allora $(\mathbf{v}^T, e)^T = (\mathbf{x}^T, e)^T + \sum_{i=1}^m \lambda'_i \mathbf{t}'_i + \sum_{i=1}^\ell \mu'_i \mathbf{s}'_i \in \mathcal{Q}$, con $\mathbf{t}'_i \in T'$ e $\mathbf{s}'_i \in S'$. Per la condizione (5.4), $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \sum_{i=1}^m \lambda'_i \mathbf{t}' + \sum_{i=1}^\ell \mu'_i \mathbf{s}'_i \in \mathcal{P}$, con $\mathbf{t}_i \in T$ e $\mathbf{s}_i \in S$. Da questo segue che T e S sono rispettivamente un insieme di rette e di raggi di \mathcal{P} . Inoltre, dal momento che $\mathcal{P} = \mathcal{P}((L, R, V, C))$, se $\mathbf{t} \in T$ e $\mathbf{s} \in S$, allora $\mathbf{t} = \sum_{i=1}^h \lambda_i \mathbf{l}_i$ e $\mathbf{s} = \sum_{i=1}^k \mu_i \mathbf{r}_i$, per qualche $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^h$ e per qualche $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}_+^k$: di conseguenza, $(\mathbf{t}^T, 0)^T = \sum_{i=1}^h \lambda_i \mathbf{l}'_i$ e $(\mathbf{s}^T, 0)^T = \sum_{i=1}^k \mu_i \mathbf{r}'_i$. Poiché questa proprietà vale per ogni elemento di T' e di S' , allora T' e S' sono rispettivamente un insieme ridondante di rette e di raggi: quindi $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}((L', R', Q))$. \square

Lemma 6.34 *Per ogni $j = 1, 2$, sia $\mathcal{P}_j = \mathcal{P}_j(\mathbf{G}_j)$ con $\mathbf{G}_j = (L_j, R_j, V_j, C_j)$ un poliedro NNC non vuoto di \mathbb{R}^n , con h_j la cardinalità di L_j e k_j quella di R_j . Allora, $\mathbf{x} \in \mathcal{P}_1 \uplus \mathcal{P}_2$ se e solo se esistono $0 \leq \nu \leq 1$, $\mathbf{x}_j \in \mathcal{C}(\mathcal{P}_j)$, $\boldsymbol{\lambda}_j \in \mathbb{R}^{h_j}$ e $\boldsymbol{\mu}_j \in \mathbb{R}_+^{k_j}$ tali che*

$$\mathbf{x} = \nu \mathbf{x}_1 + (1 - \nu) \mathbf{x}_2 + \sum_{i=1}^{k_1} \mu_{1i} \mathbf{r}_{1i} + \sum_{i=1}^{k_2} \mu_{2i} \mathbf{r}_{2i} + \sum_{i=1}^{h_1} \lambda_{1i} \mathbf{l}_{1i} + \sum_{i=1}^{h_2} \lambda_{2i} \mathbf{l}_{2i},$$

dove $(\mathbf{x}_1 \in \mathcal{P}_1 \wedge \nu > 0) \vee (\mathbf{x}_2 \in \mathcal{P}_2 \wedge \nu < 1)$.

DIMOSTRAZIONE: Per ogni $j = 1, 2$, siano ℓ_j e m_j le cardinalità degli insiemi V_j e C_j , rispettivamente. Per la definizione di involuppo poliedrale abbiamo che $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \uplus \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}(\mathbf{G})$, con $\mathbf{G} = (L, R, V, C)$ dove $L = L_1 \cup L_2$, $R = R_1 \cup R_2$, $V = V_1 \cup V_2$ e $C = C_1 \cup C_2$, rispettivamente di cardinalità h , k , ℓ e m .

Supponiamo che $\mathbf{x} \in \mathcal{P}_1 \uplus \mathcal{P}_2$. Allora,

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^h \lambda_i \mathbf{l}_i + \sum_{i=1}^k \mu_i \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^{\ell} \nu_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^m \eta_i \mathbf{c}_i,$$

con $\mathbf{l}_i \in L$, $\mathbf{r}_i \in R$, $\mathbf{v}_i \in V$ e $\mathbf{c}_i \in C$ e con $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^h$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}_+^k$, $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}_+^\ell \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}_+^m$ e $\sum_{i=1}^{\ell} \nu_i + \sum_{i=1}^m \eta_i = 1$. Questo si può riscrivere come

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \sum_{i=1}^{h_1} \lambda_{1i} \mathbf{l}_{1i} + \sum_{i=1}^{k_1} \mu_{1i} \mathbf{r}_{1i} + \sum_{i=1}^{\ell_1} \nu_{1i} \mathbf{v}_{1i} + \sum_{i=1}^{m_1} \eta_{1i} \mathbf{c}_{1i} \\ &+ \sum_{i=1}^{h_2} \lambda_{2i} \mathbf{l}_{2i} + \sum_{i=1}^{k_2} \mu_{2i} \mathbf{r}_{2i} + \sum_{i=1}^{\ell_2} \nu_{2i} \mathbf{v}_{2i} + \sum_{i=1}^{m_2} \eta_{2i} \mathbf{c}_{2i}, \end{aligned}$$

con $\mathbf{l}_{j_i} \in L_j$, $\mathbf{r}_{j_i} \in R_j$, $\mathbf{v}_{j_i} \in V_j$ e $\mathbf{c}_{j_i} \in C_j$, $\boldsymbol{\lambda}_j \in \mathbb{R}^{h_j}$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}_+^{h_j}$, $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}_+^{\ell_j}$ e $\boldsymbol{\eta}_j \in \mathbb{R}_+^{m_j}$ per $j = 1, 2$ e con $\sum_{i=1}^{\ell_1} \nu_{1_i} + \sum_{i=1}^{\ell_2} \nu_{2_i} + \sum_{i=1}^{m_1} \eta_{1_i} + \sum_{i=1}^{m_2} \eta_{2_i} = 1$ e $\sum_{i=1}^{\ell_1} \nu_{1_i} + \sum_{i=1}^{\ell_2} \nu_{2_i} > 0$. Se $\sum_{i=1}^{\ell_1} \nu_{1_i} + \sum_{i=1}^{m_1} \eta_{1_i} = 1$, allora $\boldsymbol{\nu}_2 = \boldsymbol{\eta}_2 = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{\nu}_1 \neq \mathbf{0}$ e otteniamo che $\mathbf{x}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{\ell_1} \nu_{1_i} \mathbf{v}_{1_i} + \sum_{i=1}^{m_1} \eta_{1_i} \mathbf{c}_{1_i} \in \mathcal{P}_1$. Scegliendo $\nu = 1$, abbiamo $1 - \nu = 0$ e quindi si può scegliere un qualsiasi $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{C}(\mathcal{P}_2)$. In modo analogo, se $\sum_{i=1}^{\ell_2} \nu_{2_i} + \sum_{i=1}^{m_2} \eta_{2_i} = 1$, allora $\boldsymbol{\nu}_1 = \boldsymbol{\eta}_1 = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{\nu}_2 \neq \mathbf{0}$, otteniamo che $\mathbf{x}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{\ell_2} \nu_{2_i} \mathbf{v}_{2_i} + \sum_{i=1}^{m_2} \eta_{2_i} \mathbf{c}_{2_i} \in \mathcal{P}_2$ e quindi si può scegliere un arbitrario $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{C}(\mathcal{P}_1)$. Supponiamo ora che $\sum_{i=1}^{\ell_1} \nu_{1_i} + \sum_{i=1}^{m_1} \eta_{1_i} \neq 1$ e $\sum_{i=1}^{\ell_2} \nu_{2_i} + \sum_{i=1}^{m_2} \eta_{2_i} \neq 1$. Sia allora $\nu = \sum_{i=1}^{\ell_1} \nu_{1_i} + \sum_{i=1}^{m_1} \eta_{1_i}$: si ha che $\nu > 0$ e $1 - \nu = \sum_{i=1}^{\ell_2} \nu_{2_i} + \sum_{i=1}^{m_2} \eta_{2_i} > 0$. È sufficiente definire $\mathbf{x}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\ell_1} \nu_{1_i} \mathbf{v}_{1_i} + \sum_{i=1}^{m_1} \eta_{1_i} \mathbf{c}_{1_i} \in \mathbb{C}(\mathcal{P}_1)$ e $\mathbf{x}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{1-\nu} \sum_{i=1}^{\ell_2} \nu_{2_i} \mathbf{v}_{2_i} + \sum_{i=1}^{m_2} \eta_{2_i} \mathbf{c}_{2_i} \in \mathbb{C}(\mathcal{P}_2)$. In tutti e tre i casi si ha perciò la tesi.

Viceversa, supponiamo che $\mathbf{x}_j \in \mathbb{C}(\mathcal{P}_j)$ e quindi esistono $\boldsymbol{\lambda}_j \in \mathbb{R}^{h_j}$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}_+^{k_j}$, $\boldsymbol{\nu}_j \in \mathbb{R}_+^{\ell_j}$ e $\boldsymbol{\eta}_j \in \mathbb{R}_+^{m_j}$ tali che

$$\mathbf{x}_j = \sum_{i=1}^{h_j} \lambda_{j_i} \mathbf{l}_{j_i} + \sum_{i=1}^{k_j} \mu_{j_i} \mathbf{r}_{j_i} + \sum_{i=1}^{\ell_j} \nu_{j_i} \mathbf{v}_{j_i} + \sum_{i=1}^{m_j} \eta_{j_i} \mathbf{c}_{j_i},$$

con $\mathbf{l}_{j_i} \in L_j$, $\mathbf{r}_{j_i} \in R_j$, $\mathbf{v}_{j_i} \in V_j$ e $\mathbf{c}_{j_i} \in C_j$ e $\sum_{i=1}^{\ell_j} \nu_{j_i} + \sum_{i=1}^{m_j} \eta_{j_i} = 1$. Per le ipotesi fatte possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \sum_{i=1}^{h_1} \lambda_{1_i} \mathbf{l}_{1_i} + \sum_{i=1}^{h_2} \lambda_{2_i} \mathbf{l}_{2_i} + \sum_{i=1}^{k_1} \mu_{1_i} \mathbf{r}_{1_i} + \sum_{i=1}^{k_2} \mu_{2_i} \mathbf{r}_{2_i} \\ &\quad + \nu \left(\sum_{i=1}^{\ell_1} \nu_{1_i} \mathbf{v}_{1_i} + \sum_{i=1}^{m_1} \eta_{1_i} \mathbf{c}_{1_i} \right) + (1 - \nu) \left(\sum_{i=1}^{\ell_2} \nu_{2_i} \mathbf{v}_{2_i} + \sum_{i=1}^{m_2} \eta_{2_i} \mathbf{c}_{2_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{h_1} \lambda_{1_i} \mathbf{l}_{1_i} + \sum_{i=1}^{h_2} \lambda_{2_i} \mathbf{l}_{2_i} + \sum_{i=1}^{k_1} \mu_{1_i} \mathbf{r}_{1_i} + \sum_{i=1}^{k_2} \mu_{2_i} \mathbf{r}_{2_i} \\ &\quad + \nu \sum_{i=1}^{\ell_1} \nu_{1_i} \mathbf{v}_{1_i} + (1 - \nu) \sum_{i=1}^{\ell_2} \nu_{2_i} \mathbf{v}_{2_i} + \nu \sum_{i=1}^{m_1} \eta_{1_i} \mathbf{c}_{1_i} + (1 - \nu) \sum_{i=1}^{m_2} \eta_{2_i} \mathbf{c}_{2_i}. \end{aligned}$$

Si può osservare che

$$\nu \sum_{i=1}^{\ell_1} \nu_{1_i} + (1 - \nu) \sum_{i=1}^{\ell_2} \nu_{2_i} + \nu \sum_{i=1}^{m_1} \eta_{1_i} + (1 - \nu) \sum_{i=1}^{m_2} \eta_{2_i} = 1,$$

e che dal momento che o $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{P}_1$ e $\nu > 0$ o $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{P}_2$ e $\nu < 1$, si ottiene

$\nu\nu_1 \neq \mathbf{0}$ o $(1 - \nu)\nu_2 \neq \mathbf{0}$. Quindi, si può scrivere \mathbf{x} nella forma

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^h \lambda_i \mathbf{l}_i + \sum_{i=1}^k \mu_i \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^{\ell} \nu_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^m \eta_i \mathbf{c}_i,$$

con $\mathbf{l}_i \in L_1 \cup L_2$, $\mathbf{r}_i \in R_1 \cup R_2$, $\mathbf{v}_i \in V_1 \cup V_2$, $\mathbf{c}_i \in C_1 \cup C_2$, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^h$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}_+^k$, $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}_+^{\ell}$, $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}_+^m$ e $\sum_{i=1}^{\ell} \nu_i + \sum_{i=1}^m \eta_i = 1$: si ha perciò che $\mathbf{x} \in \mathcal{P}_1 \uplus \mathcal{P}_2$. \square

6.2.1 Intersezione

L'operazione di intersezione di due poliedri NNC può essere effettuata su una generica ε -rappresentazione degli argomenti.

Proposizione 6.35 *Siano $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2 \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ tali che $\mathcal{Q}_i \Rightarrow_{\varepsilon} \mathcal{P}_i$, con $i = 1, 2$. Allora, $\mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2 \Rightarrow_{\varepsilon} \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.*

DIMOSTRAZIONE: Siano $\mathcal{Q}_1 \Rightarrow_{\varepsilon} \mathcal{P}_1$ e $\mathcal{Q}_2 \Rightarrow_{\varepsilon} \mathcal{P}_2$: dobbiamo dimostrare che vale la Definizione 5.5 per $\mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2$ e $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$. Poiché \mathcal{Q}_1 e \mathcal{Q}_2 sono rispettivamente ε -rappresentazioni di \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 , allora soddisfano la condizione (5.2) con $\delta_1, \delta_2 > 0$. Allora è sufficiente scegliere $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e otteniamo che

$$\mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2 \subseteq \{(\mathbf{x}^T, \varepsilon)^T \mid 0 \leq \varepsilon \leq \delta\}.$$

Sia ora $(\mathbf{p}^T, e)^T \in \mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2$; allora $(\mathbf{p}^T, 0)^T \in \mathcal{Q}_i$, con $i = 1, 2$. Sia ha quindi $(\mathbf{p}^T, 0)^T \in \mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2$, che coincide con la condizione (5.3).

Dimostriamo ora la condizione (5.4). Sia $\mathbf{p} \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$; allora, esistono $e_1, e_2 > 0$ tali che $(\mathbf{p}^T, e_i)^T \in \mathcal{Q}_i$. Supponiamo, senza perdere di generalità che $e_1 \leq e_2$: allora $(\mathbf{p}^T, e_1)^T \in \mathcal{Q}_2$, perché \mathcal{Q}_2 è convesso e $(\mathbf{p}^T, 0)^T \in \mathcal{Q}_2$. Quindi $(\mathbf{p}^T, e_1)^T \in \mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2$. Viceversa, supponiamo che esista $e > 0$ tale che $(\mathbf{p}^T, e)^T \in \mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2$. Allora, $(\mathbf{p}^T, e)^T \in \mathcal{Q}_1$ e $(\mathbf{p}^T, e)^T \in \mathcal{Q}_2$ e quindi $\mathbf{p} \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$. \square

Esempio 6.36 *Siano \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 due poliedri NNC di \mathbb{R} , descritti rispettivamente dai sistemi di vincoli*

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 &= \{2 < x < 5\}, \\ \mathbf{C}_2 &= \{2 \leq x \leq 3\}. \end{aligned}$$

Consideriamo \mathcal{Q}_1 e \mathcal{Q}_2 i poliedri di \mathbb{R}^2 tali che $\mathcal{Q}_1(\text{con_repr}(\mathbf{C}_1)) \Rightarrow_{\varepsilon} \mathcal{P}_1$ e $\mathcal{Q}_2(\text{con_repr}(\mathbf{C}_2)) \Rightarrow_{\varepsilon} \mathcal{P}_2$. Per la Proposizione 6.35, $\mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2 \Rightarrow_{\varepsilon} \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$. Il sistema di vincoli di $\mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2$ è formato da $2 + \varepsilon \leq x \leq 3$ e quindi $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ è definito dai vincoli $2 < x \leq 3$.

6.2.2 Inviluppo poliedrale

L'operazione di inviluppo convesso per i poliedri NNC può essere effettuata su una generica ε -rappresentazione degli argomenti, a patto che entrambi i poliedri non siano vuoti.

Proposizione 6.37 *Siano $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2 \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ tali che $\mathcal{Q}_i \ni_{\varepsilon} \mathcal{P}_i$, con $i = 1, 2$. Allora, $(\mathcal{P}_1 \neq \emptyset \wedge \mathcal{P}_2 \neq \emptyset) \implies (\mathcal{Q}_1 \uplus \mathcal{Q}_2 \ni_{\varepsilon} \mathcal{P}_1 \uplus \mathcal{P}_2)$.*

DIMOSTRAZIONE: Siano \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 non vuoti e $\mathcal{Q}_i \ni_{\varepsilon} \mathcal{P}_i$. Per $j = 1, 2$, sia $\mathcal{P}_j = \mathcal{P}_j(\mathbf{G}_j)$, con $\mathbf{G}_j = (L_j, R_j, V_j, C_j)$, con h_j e k_j le cardinalità di L_j e R_j , rispettivamente. Allora, per il Lemma 6.33, esiste $\mathbf{G}'_j = (L'_j, R'_j, Q_j)$ tale che $\mathcal{Q}_j = \mathcal{Q}_j(\mathbf{G}'_j)$. Per il Lemma 6.34, se $(\mathbf{p}^T, e)^T \in \mathcal{Q}_1 \uplus \mathcal{Q}_2$, allora, per qualche $0 \leq \nu \leq 1$, $(\mathbf{p}_i^T, e_i)^T \in \mathcal{Q}_i$, $\mathbf{l} = \sum_{i=1}^{h_1} \lambda_{1_i} \mathbf{l}_{1_i} + \sum_{i=1}^{h_2} \lambda_{2_i} \mathbf{l}_{2_i}$ e $\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{h_1} \mu_{1_i} \mathbf{r}_{1_i} + \sum_{i=1}^{h_2} \mu_{2_i} \mathbf{r}_{2_i}$, con $\lambda_j \in \mathbb{R}^{h_j}$ e $\mu_j \in \mathbb{R}_+^{k_j}$, otteniamo che

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ e \end{pmatrix} &= \nu \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 \\ e_1 \end{pmatrix} + (1 - \nu) \begin{pmatrix} \mathbf{p}_2 \\ e_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{l} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \nu \mathbf{p}_1 + (1 - \nu) \mathbf{p}_2 \\ \nu e_1 + (1 - \nu) e_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{l} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Consideriamo $(\mathbf{p}^T, e)^T \in \mathcal{Q}_1 \uplus \mathcal{Q}_2$: questo si può scrivere secondo la (6.3). Inoltre, \mathcal{Q}_1 e \mathcal{Q}_2 sono due ε -rappresentazioni e quindi soddisfano la condizione (5.2) con $\delta_1, \delta_2 > 0$. Sia $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$ e consideriamo $e = \nu e_1 + (1 - \nu) e_2$: è tale che $0 \leq e \leq \delta$ e quindi $(\mathbf{p}^T, e)^T$ soddisfa in vincolo $0 \leq \varepsilon \leq \delta$ (che è la condizione (5.2)).

Inoltre, \mathcal{Q}_1 e \mathcal{Q}_2 soddisfano la condizione (5.3) e quindi questa condizione vale anche per $\mathcal{Q}_1 \uplus \mathcal{Q}_2$, perché $(\mathbf{p}^T, 0)^T \in \mathcal{Q}_1$ e $(\mathbf{p}^T, 0)^T \in \mathcal{Q}_2$ e

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ 0 \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 \\ 0 \end{pmatrix} + (1 - \nu) \begin{pmatrix} \mathbf{p}_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{l} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{Q}_1 \uplus \mathcal{Q}_2.$$

Ora dimostriamo la condizione (5.4). Sia $\mathbf{p} \in \mathcal{P}_1 \uplus \mathcal{P}_2$; allora per il Lemma 6.34, $\mathbf{p} = \nu \mathbf{p}_1 + (1 - \nu) \mathbf{p}_2 + \mathbf{l} + \mathbf{r}$, per qualche $0 \leq \nu \leq 1$, $\mathbf{p}_1 \in \mathbb{C}(\mathcal{P}_1)$ e $\mathbf{p}_2 \in \mathbb{C}(\mathcal{P}_2)$, dove $\mathbf{p}_1 \in \mathcal{P}_1$ e $\nu > 0$ o $\mathbf{p}_2 \in \mathcal{P}_2$ e $\nu < 1$, $\mathbf{l} = \sum_{i=1}^{h_1} \lambda_{1_i} \mathbf{l}_{1_i} + \sum_{i=1}^{h_2} \lambda_{2_i} \mathbf{l}_{2_i}$ e $\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{h_1} \mu_{1_i} \mathbf{r}_{1_i} + \sum_{i=1}^{h_2} \mu_{2_i} \mathbf{r}_{2_i}$, con $\lambda_j \in \mathbb{R}^{h_j}$ e $\mu_j \in \mathbb{R}_+^{k_j}$. Supponiamo, senza perdere di generalità, che $\mathbf{p}_1 \in \mathcal{P}_1$ e $\nu > 0$. Poiché $\mathcal{Q}_1 \ni_{\varepsilon} \mathcal{P}_1$, esiste un $e_1 > 0$ tale che $(\mathbf{p}_1^T, e_1)^T \in \mathcal{Q}_1$; inoltre, poiché \mathcal{Q}_2 è una ε -rappresentazione, per il Lemma 5.18, sappiamo che $(\mathbf{p}_2^T, 0)^T \in \mathcal{Q}_2$. Se definiamo

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ e_1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \nu \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 \\ e_1 \end{pmatrix} + (1 - \nu) \begin{pmatrix} \mathbf{p}_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{l} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ 0 \end{pmatrix},$$

otteniamo che $(\mathbf{p}^T, e_1)^T \in \mathcal{Q}_1 \uplus \mathcal{Q}_2$, con $e_1 > 0$. Viceversa, supponiamo che esista un $e > 0$ tale che $(\mathbf{p}^T, e)^T \in \mathcal{Q}_1 \uplus \mathcal{Q}_2$ e quindi $(\mathbf{p}^T, e)^T$ si può scrivere tramite la (6.3). I valori $e_1, e_2 \geq 0$ esistono, perché $\mathcal{Q}_1 \rightleftharpoons_\epsilon \mathcal{P}_1$ e $\mathcal{Q}_2 \rightleftharpoons_\epsilon \mathcal{P}_2$. Poiché si ha che $e > 0$ e $\nu \geq 0$, allora si ha che $e_1 > 0$ e $\nu > 0$ o $e_2 > 0$ e $\nu < 1$. Inoltre, poiché $\mathcal{Q}_1 \rightleftharpoons_\epsilon \mathcal{P}_1$, $\mathbf{p}_1 \in \mathcal{P}_1$ e poiché $\mathcal{Q}_2 \rightleftharpoons_\epsilon \mathcal{P}_2$, per il Lemma 5.18, $\mathbf{p}_2 \in \mathbb{C}(\mathcal{P}_2)$. Quindi per il Lemma 6.34, $\mathbf{p} = \nu \mathbf{p}_1 + (1 - \nu) \mathbf{p}_2 + \mathbf{l} + \mathbf{r} \in \mathcal{P}_1 \uplus \mathcal{P}_2$. \square

Esempio 6.38 Siano \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 due poliedri di \mathbb{R}^2 descritti rispettivamente dai sistemi di generatori

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_1 &= (\emptyset, \emptyset, (3, 0)^T \{(2, 0)^T, (4, 0)^T\}), \\ \mathbf{G}_2 &= (\emptyset, \emptyset, \{(2, 1)^T, (4, 1)^T, (2, 2)^T, (4, 2)^T\}). \end{aligned}$$

Siano $\mathcal{Q}_1(\text{gen_repr}(\mathbf{G}_1)) \rightleftharpoons_\epsilon \mathcal{P}_1$ e $\mathcal{Q}_2(\text{gen_repr}(\mathbf{G}_2)) \rightleftharpoons_\epsilon \mathcal{P}_2$. Per la Proposizione 6.37, si ha che $\mathcal{Q}_1 \uplus \mathcal{Q}_2 \rightleftharpoons_\epsilon \mathcal{P}_1 \uplus \mathcal{P}_2$. Quindi il poliedro $\mathcal{P}_1 \uplus \mathcal{P}_2$ ha come sistema di generatori l'insieme

$$\mathbf{G} = (\emptyset, \emptyset, \{(2, 2)^T, (4, 2)^T\}, \{(2, 0)^T, (4, 0)^T, (2, 2)^T, (4, 2)^T\}).$$

6.2.3 Immagine (inversa) di una trasformazione affine

Il calcolo dell'immagine (inversa) di una trasformazione affine di un poliedro NNC può essere eseguito utilizzando una generica ϵ -rappresentazione dell'argomento.

Proposizione 6.39 Siano $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro NNC e $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ un poliedro chiuso tale che $\mathcal{Q} \rightleftharpoons_\epsilon \mathcal{P}$ e sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una trasformazione affine tale che $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$. Allora $g(\mathcal{Q}) \rightleftharpoons_\epsilon f(\mathcal{P})$, dove $g: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ e

$$g(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \epsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{pmatrix}$$

è la trasformazione affine corrispondente sui poliedri chiusi di \mathbb{R}^{n+1} .

DIMOSTRAZIONE: Sia $\mathcal{Q} \rightleftharpoons_\epsilon \mathcal{P}$. Consideriamo $(\mathbf{x}^T, \epsilon)^T \in \mathcal{Q}$, con $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$. Allora, abbiamo che

$$g((\mathbf{x}^T, \epsilon)^T) = (f(\mathbf{x})^T, \epsilon)^T.$$

Quindi la Definizione 5.5 vale per $g(\mathcal{Q}) \rightleftharpoons_\epsilon f(\mathcal{P})$, perché $\mathcal{Q} \rightleftharpoons_\epsilon \mathcal{P}$. \square

Capitolo 7

Conclusione

7.1 Lavori correlati

In letteratura si trovano diversi lavori che si occupano della doppia rappresentazione dei poliedri e della descrizione delle operazioni che si possono eseguire su questi.

Uno dei primi lavori che descrive la doppia rappresentazione è [Wey35], che abbiamo considerato nella sua versione in inglese [Wey50]: in particolare, viene mostrato che ogni poliedro può essere rappresentato sia in forma implicita che in quella parametrica. In [MRTT53], gli autori presentano un metodo per passare dalla rappresentazione implicita a quella parametrica di un cono poliedrale. N. V. Chernikova in [Che64, Che65] e [Che68] descrive un algoritmo per calcolare il sistema di generatori di un cono poliedrale puntato non negativo definito tramite i vincoli; l'algoritmo sfrutta la proprietà di adiacenza per eliminare in modo efficiente i raggi ridondanti. Questo algoritmo è poi ripreso in [Le 92] e viene estesa la sua applicabilità ad un qualunque cono poliedrale; inoltre, viene modificato il test di adiacenza, migliorando l'efficienza dell'algoritmo. Anche in [FP96], gli autori propongono un miglioramento agli algoritmi precedenti, evidenziando il fatto che l'efficienza del metodo dipende dall'ordine in cui vengono considerati i vincoli e descrivono un'euristica di ordinamento che, molto spesso, porta a considerevoli aumenti di efficienza. In [Wil93], l'autore descrive anche le principali operazioni sui poliedri convessi. Inoltre, per primo introduce una ulteriore tecnica di calcolo incrementale: l'algoritmo che utilizza sfrutta le *matrici di saturazione*, cioè strutture dati in cui vengono memorizzate le relazioni che intercorrono tra i vincoli e i generatori di un poliedro.

Tutti i lavori elencati si occupano solamente di poliedri topologicamente chiusi. In [HPR94, HPR97], invece, oltre a considerare questi poliedri, viene

descritto brevemente il metodo della ε -rappresentazione per i poliedri non necessariamente chiusi. Inoltre, sono descritte alcune operazioni per i poliedri NNC, quali il test di inclusione e il metodo per verificare se un poliedro è vuoto, ma non viene presentato il concetto di sistema minimale per questi poliedri.

Infine, sono stati considerati alcuni articoli che si occupano dei poliedri concentrandosi soprattutto sull'operazione di widening: [CH78, Hal79, CC92b, Hal93, BK96, BJT99, HPR94, HPR97, SG96].

In alcuni di questi lavori però si possono riscontrare piccole imprecisioni o inesattezze che a volte rendono ambiguo il significato di ciò che si sta trattando.

L'imprecisione più diffusa riguarda la rappresentazione parametrica di un poliedro: spesso si parla di vertici e raggi estremali anche quando il poliedro contiene rette ed è perciò privo di questi oggetti. La prima volta che è stato riscontrato questo problema è stato in [Le 92, Section 6, pagg. 10–11] dove viene detto che per la rappresentazione parametrica di un poliedro sono necessari i vertici e i raggi estremali. In questo caso, però, il problema riguarda solamente i vertici, perché la definizione di raggio estremo fornita da Le Verge per i coni in [Le 92, Section 2, pag. 4] ed estesa ai poliedri in [Le 92, Section 6, pag. 11] è diversa dalla Definizione 3.35, che deriva da quella usata in [Wil93].

In [Wil93, Section 2.4.1, pagg. 10–11 e Sezione 2.6.1, pag. 11], invece, il problema riguarda solamente i raggi estremali, in quanto l'uso improprio del termine 'vertice' è giustificato in una nota, nella quale si dice che per 'vertici di \mathcal{P} ' si devono intendere i vertici del poliedro $\mathcal{P} \setminus \text{lin.space}(\mathcal{P})$. Invece, il concetto di raggio estremo viene usato in modo inappropriato senza una nota esplicativa: ad esempio, quando viene descritto il teorema di Motzkin per scomporre il poliedro, Wilde sostiene che il suo cono caratteristico è descritto dalle rette e dai raggi estremali del poliedro.

Un'altra inesattezza che abbiamo riscontrato in [Wil93, Section 2.7.2, Definition 2.25 e Property 2.7, pag.12] riguarda il concetto di polare di un poliedro. La definizione fornita per il polare \mathcal{P}^* di un poliedro $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ che contiene il vettore $\mathbf{0}$ dice che \mathcal{P}^* è l'insieme $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \forall \mathbf{x} \in \mathcal{P} : \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \geq 0\}$. Successivamente afferma che i poliedri \mathcal{P} e \mathcal{P}^* sono duali uno dell'altro, avendo però definito questo concetto solamente per due politopi. Inoltre, anche se proviamo a considerare il caso in cui \mathcal{P} sia un politopo contenente l'origine, non è detto che \mathcal{P}^* sia anch'esso un politopo. Infatti, se ad esempio consideriamo il triangolo rettangolo di \mathbb{R}^2 di vertici $(0,0)^T$, $(1,0)^T$ e $(0,1)^T$, il poliedro \mathcal{P}^* è un cono puntato che coincide con il primo quadrante e quindi non si può applicare il concetto di politopi duali.

Successivamente in [Wil93, Section 2.7.2, Enumeration (i), pag.12] vie-

ne detto che dato un poliedro $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ scritto tramite la scomposizione di Motzkin, e cioè come $\mathcal{P} = \mathcal{V} + \mathcal{C}$ (con \mathcal{V} uguale all'insieme delle combinazioni convesse di un numero finito di punti di \mathcal{P} , $\mathbf{0}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ e con $\mathcal{C} = \text{cone}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_t)$), il suo polare \mathcal{P}^* si può scrivere come

$$\mathcal{P}^* = \{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \dots, m\} : \langle \mathbf{z}, \mathbf{x}_i \rangle \leq 1 \} \\ + \{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \dots, t\} : \langle \mathbf{z}, \mathbf{y}_i \rangle \leq 0 \}.$$

Se applichiamo questa caratterizzazione del poliedro duale al triangolo usato in precedenza, otteniamo che il suo polare è descritto dai vincoli $x \leq 1$ e $y \leq 1$, che non coincide con quello ottenuto con la definizione [Wil93, Section 2.7.2, Definition 2.25, pag.12], cioè con il poliedro definito dai vincoli $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Inoltre, questi risultati sono diversi anche da quelli ottenuti applicando la definizione [Wil93, Section 2.7.2, Definition 2.25, pag.12] al cono ottenuto omogeneizzando il triangolo e poi invertendo il procedimento dell'omogeneizzazione per ritornare in dimensione 2: in questo caso il poliedro ottenuto è descritto dai vincoli $x \geq -1$ e $y \geq -1$. Le osservazioni successive sui polari di un poliedro risentono perciò di questi problemi.

Anche la parte che descrive la tecnica di omogeneizzazione di un poliedro in [Wil93, Section 3.1, pagg. 13–14] non è completamente chiara. Infatti, dato un poliedro $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ definito come

$$\mathcal{P} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, C\mathbf{x} \geq \mathbf{d} \},$$

viene detto che l'insieme

$$\mathcal{C} = \{ \hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \hat{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}, \hat{C}\hat{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0} \},$$

dove

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \xi \mathbf{x} \\ \xi \end{pmatrix}, \\ \hat{A} = \begin{pmatrix} A & -\mathbf{b} \end{pmatrix}, \\ \hat{C} = \begin{pmatrix} C & -\mathbf{d} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$$

è un cono di \mathbb{R}^{n+1} . Ma questo non è sempre vero. Se consideriamo, ad esempio, il poliedro $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}$ formato dalla semiretta delle ascisse positive, l'insieme $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^2$ che si ottiene non è un poliedro. Infatti, \mathcal{C} è formato da tutte le rette che hanno origine in $\mathbf{0}$ e che passano per i punti $(x, 1)^T$ con x appartenente a \mathcal{P} , e cioè $x \geq 0$. Questo significa che l'angolo che l'asse x forma con queste semirette tende a zero, ma l'unico punto descritto

da $\xi = 0$ è $(0 \cdot x, 0)^T = \mathbf{0}$. Quindi l'insieme \mathcal{C} può essere scritto come $\{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y > 0\} \cup \{(0, 0)^T \in \mathbb{R}^2\}$ e questo non è un poliedro perché non si può scrivere come intersezione di un numero finito di semispazi.

In [Wil93, Section 3.4 e Table 3.3, pag. 17, Sezione 4.9, pag. 37], inoltre, si parla anche di due operazioni tra poliedri chiamate *unione* e *unione convessa*. Viene sottolineato il fatto che mentre l'operazione di unione di due poliedri non è chiusa nell'insieme dei poliedri, l'operazione di unione convessa che individua il più piccolo insieme convesso che contiene l'unione dei due poliedri è chiusa in questo insieme. Questo fatto, però, è falso. Un semplice controesempio è ottenuto in \mathbb{R}^2 considerando i poliedri $\mathcal{P}_1 = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$ e $\mathcal{P}_2 = \{(1, 0)^T\}$. Come è stato osservato in [SW70], l'involuppo convesso di $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ è l'insieme

$$\{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < 1\} \cup \mathcal{P}_2,$$

che non può essere scritto come intersezione di un numero finito di semispazi.

Alcune di queste imprecisioni sono poi riportate in testi successivi a quelli appena citati. Ad esempio, in [BJT99] dove viene descritto un nuovo tipo di widening per i poliedri, si riscontra il solito abuso dei termini “raggio estremale” e “vertice” di un poliedro ([BJT99, Theorem 5, pag. 63]) e in [BJT99, Definition 7, pag. 63] viene impropriamente affermato che l'insieme dei raggi estremali forma una base che descrive tutte le direzioni in cui il poliedro è non limitato.

7.2 La *Parma Polyhedra Library*

La *Parma Polyhedra Library* (o PPL, <http://www.cs.unipr.it/ppl/>) ha avuto origine come progetto di gruppo nel gennaio 2001 presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Parma. La PPL ambisce a diventare una libreria professionale per il trattamento di approssimazioni basate sui poliedri convessi (non necessariamente chiusi) finalizzato all'interpretazione astratta e alla verifica assistita dal calcolatore. In questa sezione, presentiamo brevemente alcuni degli aspetti caratteristici della libreria.¹ Prima di continuare, è forse necessario evidenziare il fatto che gli aspetti teorici trattati nei precedenti capitoli riguardano poliedri di \mathbb{R}^n . Non deve essere motivo di sorpresa, però, il fatto che l'implementazione si occupi solamente di poliedri razionali, cioè di poliedri che possono essere definiti da vincoli con coefficienti razionali o, dualmente, da generatori con coordinate razionali. È facile verificare che

¹Gli aspetti qui descritti e molti altri sono presenti nella versione 0.4 della libreria disponibile sul sito <http://www.cs.unipr.it/ppl/>.

la proprietà di essere razionale è preservata da tutte le operazioni che sono interessanti per le applicazioni cui la libreria si rivolge.

La libreria è scritta utilizzando il linguaggio di programmazione C++ standard e questo garantisce, tra le altre cose, la massima compatibilità rispetto alle varie piattaforme di calcolo² disponibili. L'uso del C++ per lo sviluppo della libreria ha reso più facile l'utilizzo di numerose tecniche di programmazione che sono la chiave della robustezza, della generalità, dell'efficienza e dell'usabilità della libreria. Comunque, per ottenere il massimo riutilizzo e la massima utilità del codice prodotto, ci si è preoccupati di fare in modo che l'applicazione non debba essere necessariamente scritta in C++. A tale scopo, la libreria include un'interfaccia per il linguaggio C completa e può quindi essere utilizzata da tutte le implementazioni di linguaggi di programmazione (ce ne sono molte) che forniscono un'interfaccia per il C. È anche disponibile un'interfaccia per il Prolog che supporta diversi sistemi Prolog e lo sviluppo di interfacce dirette per altri linguaggi, come Objective Caml e Mercury, è previsto per il prossimo futuro.

Una delle caratteristiche chiave della libreria è la robustezza. In particolare, ciò significa che vengono presi opportuni provvedimenti al fine di evitare il fallimento della computazione e, quando ciò è inevitabile, detti fallimenti sono rilevati e gestiti in modo tempestivo. La PPL, per cominciare, usa un'aritmetica di interi a precisione arbitraria per implementare i coefficienti e le coordinate, ed è così esente da problemi di arrotondamento e di overflow. Inoltre, tutte le strutture dati utilizzate nell'implementazione sono completamente dinamiche e possono essere espanse automaticamente —in tempo medio costante (*amortized constant time*)— ad ogni dimensione permessa dalla memoria virtuale disponibile. Altri due aspetti per evitare i fallimenti sono l'occultamento di ogni dettaglio implementativo ed il controllo sistematico delle invarianti dell'interfaccia. A differenza di altre librerie, la PPL nasconde i dettagli di implementazione quasi completamente. Per esempio, la rappresentazione interna dei vincoli, dei generatori e dei sistemi corrispondenti non viene esposta all'applicazione utente. In modo analogo, i meccanismi implementativi come il *positivity constraint* [Wil93] e tutti gli oggetti che riguardano la codifica della ε -rappresentazione dei poliedri NNC sono completamente invisibili dall'esterno. L'applicazione utente è fornita di interfacce naturali, che permettono la diretta manipolazione dei concetti di alto livello, come le disequazioni, le rette e i punti di chiusura. Per esempio, nei giusti contesti, ' $X < 5*Z$ ' e ' $X + 2*Y + 5*Z \geq 7$ ' è sintassi valida che esprime una disequazione stretta e una non stretta, sia nell'interfaccia per

²Una *piattaforma di calcolo* è la composizione di una macchina hardware (ad esempio, il cosiddetto *PC compatibile*) e di un sistema operativo (*Linux*, ad esempio).

il C++ che in quella per il Prolog. Anche l'interfaccia per il C, che si trova necessariamente a un livello di astrazione considerevolmente più basso, si riferisce a concetti come l'espressione lineare, il vincolo e il sistema di vincoli e non alle loro possibili implementazioni mediante vettori e matrici. Come è noto, questo è molto importante sia per prevenire gli errori, sia per garantire la massima libertà per l'implementazione.

L'accesso vietato alle strutture interne manipolate dalla libreria e il controllo sistematico delle invarianti dell'interfaccia potrebbe avere un impatto negativo sull'efficienza complessiva del sistema. D'altra parte, questo costo aggiuntivo può essere completamente compensato (fino al punto di ottenere un aumento della velocità di calcolo) se l'implementazione riesce a sfruttare tutta la libertà che le viene consentita dall'interfaccia utente. Anche se, al momento della stesura di questa tesi, la PPL utilizza solamente una piccola parte di questa libertà, tutto è predisposto per ottenerne il massimo vantaggio. In aggiunta, la libreria è stata progettata per supportare l'applicazione sistematica di tecniche di computazione incrementale (in cui, cioè, parte dei risultati o dei sottoprodotti delle operazioni precedenti vengono conservati per facilitare le operazioni successive) e *lazy* (vale a dire che ogni calcolo viene postposto il più possibile, ottenendone quindi un guadagno nel caso in cui questo si rivelasse non necessario). Da queste tecniche è ragionevole aspettarsi miglioramenti di efficienza considerevoli.³

Nel progetto della libreria, particolare attenzione è stata dedicata alle questioni della scalabilità, ovvero al comportamento della libreria all'aumentare della dimensione dei problemi da trattare. Infatti, ogni libreria che operi su poliedri, data la natura esponenziale di molte operazioni, deve fronteggiare la possibilità del consumo eccessivo di tempo macchina e/o di memoria [HPWT01]. Una soluzione lontana dall'essere soddisfacente, seppure possibile, è quella di sperare che tutto vada per il meglio ed eventualmente "uccidere" quei processi che richiedano più delle risorse disponibili [BBC⁺98]. Al contrario, ciò a cui noi aspiriamo è un supporto per la composizione dinamica e automatica di un compromesso soddisfacente tra espressività ed efficienza. In questo scenario, l'analisi statica o le procedure di verifica dovrebbero, per default, usare i domini più descrittivi (e potenzialmente più costosi), come quello dei poliedri convessi. Solo quando la computazione di un'operazione su queste descrizioni richiedesse troppo tempo, o memoria, il sistema dovrebbe rilevare la situazione ed eseguire un cambio di rappresentazione, per esempio approssimando i poliedri in input con *bounding box* (regioni rettangolari

³Le tecniche di incrementalità e di *lazyness* includono l'uso delle matrici di saturazione (già presenti in Polylib [Wil93]) e la loro manipolazione efficiente, la minimizzazione posticipata e incrementale dei sistemi di vincoli e di generatori, e l'ordinamento incrementale delle matrici.

```

typedef Parma_Polyhedra_Library::NNC_Polyhedron PH;
void complex_function(const PH& ph1, const PH& ph2, PH& result) {
  try {
    start_timer(max_time_for_complex_function);
    complex_function_on_polyhedra(ph1, ph2, result ...);
    stop_timer();
  }
  catch (Exception& e) {
    // Virtual memory exhausted, or timeout expired,
    // or any other error.
    ...
    BoundingBox bb1, bb2, bb_result;
    ph1.shrink_bounding_box(bb1);
    ph2.shrink_bounding_box(bb2);
    complex_function_on_bounding_boxes(bb1, bb2, bb_result ...);
    result = Polyhedron(bb_result);
  }
}

```

Figura 7.1: Uso di *bounding box* quando l'analisi con i poliedri è troppo costosa.

con i lati paralleli agli assi) che li limitano; dopo l'esecuzione dell'operazione richiesta su questo dominio meno preciso (ma anche computazionalmente meno costoso), il risultato può essere convertito nuovamente in un poliedro. Questo scenario è possibile solo se il software di manipolazione dei poliedri è implementato in modo da poter reagire, in modo coerente e senza alcuna perdita delle risorse del sistema, a eventi quali lo scadere di un *timeout* o il lancio di un'eccezione da parte delle procedure per l'allocazione della memoria. Per ciò che sappiamo, la Parma Polyhedra Library è la prima libreria che fornisce questa abilità. L'idea è mostrata in Figura 7.1, dove è esemplificata l'implementazione robusta (in C++) di un'operazione fittizia che abbiamo chiamato `complex_function`. L'obiettivo è quello di calcolare il poliedro `result` partendo dai poliedri `ph1` e `ph2`. Si prova per prima cosa l'operazione sui poliedri stessi e, in caso di fallimento, il calcolo è eseguito sulle approssimazioni *bounding box* di `ph1` e `ph2`. Nel secondo caso, il risultato con le *bounding box*, `bb_result`, è convertito in un poliedro convesso e assegnato al poliedro di output `result`. Il compromesso tra l'efficienza e la precisione può anche essere controllato per mezzo delle operazioni di widening fornite dalla PPL, che si basano su quelle originariamente proposte in [CH78] e migliorate in [Hal79].

Riguardo all'efficienza della PPL, al momento nessuna applicazione può utilizzare sia la PPL che un'altra libreria per i poliedri convessi; non sono

dunque possibili confronti. La PPL è però stata integrata con l'analizzatore CHINA [Bag97] ai fini di ottenere relazioni lineari tra le dimensioni degli argomenti di un programma logico [BK97]. La *performance* del sistema combinato è stata confrontata, sullo stesso compito, con quella dell'analizzatore cTI [MN01], che usa un'implementazione dei poliedri convessi basata sul pacchetto CLP(Q) di SICStus Prolog [SIC02]. Il sistema combinato CHINA+PPL surclassa quella versione di cTI, terminando quando cTI è soggetto a *thrashing*⁴ e mostrando, negli altri casi, aumenti di velocità di uno o più ordini di grandezza.

La Parma Polyhedra Library è software libero distribuito alle condizioni stabilite dalla *GNU Public License*: in breve, il codice e la documentazione possono essere scaricati, usati, modificati e ridistribuiti da chiunque. Inoltre lo sviluppo della libreria può essere seguito, praticamente "in diretta", sul sito <http://cs.unipr.it/ppl/>.

7.3 Epilogo

I poliedri convessi forniscono la base per numerose astrazioni usate nell'analisi statica e per la verifica assistita dal calcolatore di sistemi complessi e a volte utilizzati per compiti critici. Per questi scopi, un'implementazione dei poliedri convessi deve essere fondata solidamente su un'infrastruttura teorica chiara e scritta in accordo con i più rigorosi principi dello sviluppo del software. In questo lavoro di tesi abbiamo presentato la teoria fondamentale su cui si basa la *Parma Polyhedra Library*.

Inizialmente abbiamo introdotto alcuni aspetti dell'interpretazione astratta, per poter giustificare l'importanza del dominio dei poliedri. Successivamente, abbiamo descritto gli elementi caratteristici dei poliedri convessi chiusi, quali i *vincoli* e i *generatori*. Inoltre, abbiamo introdotto la *doppia rappresentazione* dei poliedri convessi, il cosiddetto algoritmo di Chernikova, che consente il passaggio dalla rappresentazione implicita a quella parametrica (e viceversa) e la definizione di sistema minimale di vincoli e di generatori. Abbiamo anche descritto i poliedri convessi non necessariamente chiusi e ci siamo soffermati soprattutto sulla loro doppia rappresentazione, introducendo una soluzione innovativa al problema della minimizzazione dei sistemi. Inoltre, abbiamo presentato le operazioni sui poliedri convessi che sono necessarie per le applicazioni di analisi e di verifica dei programmi, soffermandoci soprattutto sulla famiglia dei widening. Infine, abbiamo bre-

⁴Il fenomeno per il quale un sistema, avendo utilizzato tutta la memoria fisica disponibile, passa la quasi totalità del tempo nel trasferimento di pagine di memoria virtuale dal disco alla memoria fisica e viceversa.

vemente schematizzato alcune delle principali caratteristiche del progetto e dell'implementazione della Parma Polyhedra Library.

Bibliografia

- [Bag97] R. Bagnara. *Data-Flow Analysis for Constraint Logic-Based Languages*. PhD thesis, Dipartimento di Informatica, Università di Pisa, Pisa, Italy, 1997. Printed as Report TD-1/97.
- [BBC⁺98] N. S. Bjørner, A. Browne, M. Colón, B. Finkbeiner, Z. Manna, M. Pichora, H. B. Sipma, and T. E. Uribe. *STeP: The Stanford Temporal Prover (Educational Release) User's Manual*. Computer Science Department, Stanford University, Stanford, California, version 1.4- α edition, July 1998. Available at <http://www-step.stanford.edu/>.
- [BF99] B. Bérard and L. Fribourg. Reachability analysis of (timed) Petri nets using real arithmetic. In J. C. M. Baeten and S. Mauw, editors, *CONCUR'99: Concurrency Theory, Proceedings of the 10th International Conference*, volume 1664 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 178–193, Eindhoven, The Netherlands, 1999. Springer-Verlag, Berlin.
- [BHRZ02] R. Bagnara, P. M. Hill, E. Ricci, and E. Zaffanella. *The Parma Polyhedra Library User's Manual*. Department of Mathematics, University of Parma, Parma, Italy, release 0.4 edition, July 2002. Available at <http://www.cs.unipr.it/ppl/>.
- [BJT99] F. Besson, T. P. Jensen, and J.-P. Talpin. Polyhedral analysis for synchronous languages. In A. Cortesi and G. Filé, editors, *Static Analysis: Proceedings of the 6th International Symposium*, volume 1694 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 51–68, Venice, Italy, 1999. Springer-Verlag, Berlin.
- [BK96] F. Benoy and A. King. Inferring argument size relationship with CLP(R). In *Logic Programming Synthesis and Transformation*, pages 203–223, 1996.

- [BK97] F. Benoy and A. King. Inferring argument size relationships with CLP(R). In J. P. Gallagher, editor, *Logic Programming Synthesis and Transformation: Proceedings of the 6th International Workshop*, volume 1207 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 204–223, Stockholm, Sweden, 1997. Springer-Verlag, Berlin.
- [BRZH02a] R. Bagnara, E. Ricci, E. Zaffanella, and P. M. Hill. Possibly not closed convex polyhedra and the parma polyhedra library. In M. Hermenegildo and G. Puebla, editors, *Static Analysis: 9th International Symposium, SAS 2002*, volume 2477 of *Lecture Notes in Computer Science*, Madrid, Spain, 2002. Springer-Verlag, Berlin. To appear.
- [BRZH02b] R. Bagnara, E. Ricci, E. Zaffanella, and P. M. Hill. Possibly not closed convex polyhedra and the Parma Polyhedra Library. Quaderno 286, Dipartimento di Matematica, Università di Parma, Italy, 2002. See also [BRZH02c]. Available at <http://www.cs.unipr.it/Publications/>.
- [BRZH02c] R. Bagnara, E. Ricci, E. Zaffanella, and P. M. Hill. Errata for technical report “Quaderno 286”. Available at <http://www.cs.unipr.it/Publications/>, 2002. See [BRZH02b].
- [CC77] P. Cousot and R. Cousot. Abstract interpretation: A unified lattice model for static analysis of programs by construction or approximation of fixpoints. In *Proceedings of the Fourth Annual ACM Symposium on Principles of Programming Languages*, pages 238–252, 1977.
- [CC92a] P. Cousot and R. Cousot. Abstract interpretation and applications to logic programs. *Journal of Logic Programming*, 13(2&3):103–179, 1992.
- [CC92b] P. Cousot and R. Cousot. Comparing the Galois connection and widening/narrowing approaches to abstract interpretation. In M. Bruynooghe and M. Wirsing, editors, *Proceedings of the 4th International Symposium on Programming Language Implementation and Logic Programming*, volume 631 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 269–295, Leuven, Belgium, 1992. Springer-Verlag, Berlin.
- [CH78] P. Cousot and N. Halbwachs. Automatic discovery of linear restraints among variables of a program. In *Conference Re-*

cord of the Fifth Annual ACM Symposium on Principles of Programming Languages, pages 84–96, Tucson, Arizona, 1978. ACM Press.

- [Che64] N. V. Chernikova. Algorithm for finding a general formula for the non-negative solutions of system of linear equations. *U.S.S.R. Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 4(4):151–158, 1964.
- [Che65] N. V. Chernikova. Algorithm for finding a general formula for the non-negative solutions of system of linear inequalities. *U.S.S.R. Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 5(2):228–233, 1965.
- [Che68] N. V. Chernikova. Algorithm for discovering the set of all solutions of a linear programming problem. *U.S.S.R. Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 8(6):282–293, 1968.
- [Cou01] P. Cousot, editor. *Static Analysis: 8th International Symposium, SAS 2001*, volume 2126 of *Lecture Notes in Computer Science*, Paris, France, 2001. Springer-Verlag, Berlin.
- [CS01] M. A. Colón and H. B. Sipma. Synthesis of linear ranking functions. In T. Margaria and W. Yi, editors, *Proceedings of the 7th International Conference on Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems (TACAS 2001)*, volume 2031 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 67–81, Genova, Italy, 2001. Springer-Verlag, Berlin.
- [DRS01] N. Dor, M. Rodeh, and S. Sagiv. Cleaness checking of string manipulations in C programs via integer analysis. In Cousot [Cou01], pages 194–212.
- [FP96] K. Fukuda and A. Prodon. Double description method revisited. In M. Deza, R. Euler, and Y. Manoussakis, editors, *Combinatorics and Computer Science, 8th Franco-Japanese and 4th Franco-Chinese Conference, Brest, France, July 3-5, 1995, Selected Papers*, volume 1120 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 91–111. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [Hal79] N. Halbwachs. *Détermination Automatique de Relations Linéaires Vérifiées par les Variables d'un Programme*. Thèse de 3^{ème} cycle d'informatique, Université scientifique et médicale de Grenoble, Grenoble, France, March 1979.

- [Hal93] N. Halbwachs. Delay analysis in synchronous programs. In C. Courcoubetis, editor, *Computer Aided Verification: Proceedings of the 5th International Conference*, volume 697 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 333–346, Elounda, Greece, 1993. Springer-Verlag, Berlin.
- [HHWT97] T. A. Henzinger, P.-H. Ho, and H. Wong-Toi. HYTECH: A model checker for hybrid systems. *Software Tools for Technology Transfer*, 1(1+2):110–122, 1997.
- [HPR94] N. Halbwachs, Y.-E. Proy, and P. Raymond. Verification of linear hybrid systems by means of convex approximations. In B. Le Charlier, editor, *Static Analysis: Proceedings of the 1st International Symposium*, volume 864 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 223–237, Namur, Belgium, 1994. Springer-Verlag, Berlin.
- [HPR97] N. Halbwachs, Y.-E. Proy, and P. Roumanoff. Verification of real-time systems using linear relation analysis. *Formal Methods in System Design*, 11(2):157–185, 1997.
- [HPWT01] T. A. Henzinger, J. Preussig, and H. Wong-Toi. Some lessons from the HYTECH experience. In *Proceedings of the 40th Annual Conference on Decision and Control*, pages 2887–2892. IEEE Computer Society Press, 2001.
- [Jea02] B. Jeannet. *Convex Polyhedra Library*, release 1.1.3c edition, March 2002. Documentation of the “New Polka” library available at <http://www.irisa.fr/prive/Bertrand.Jeannet/newpolka.html>.
- [KSB97] A. King, K. Shen, and F. Benoy. Lower-bound time-complexity analysis of logic programs. In J. Maluszynski, editor, *Logic Programming: Proceedings of the 1997 International Symposium*, MIT Press Series in Logic Programming, pages 261–275, Port Jefferson, Long Island, N.Y., 1997. The MIT Press.
- [Lan77] S. Lang. *Algebra Lineare*. Editore Boringhieri, Torino, 1977.
- [Le 92] H. Le Verge. A note on Chernikova’s algorithm. *Publication interne 635*, IRISA, Campus de Beaulieu, Rennes, France, 1992.
- [Loe99] V. Loechner. *PolyLib*: A library for manipulating parameterized polyhedra. Available at <http://icps.u-strasbg.fr/>

- ~loechner/polylib/, March 1999. Declares itself to be a continuation of [Wil93].
- [MBB⁺99] Z. Manna, N. S. Bjørner, A. Browne, M. Colón, B. Finkbeiner, M. Pichora, H. B. Sipma, and T. E. Uribe. An update on STeP: Deductive-algorithmic verification of reactive systems. In R. Berghammer and Y. Lakhnech, editors, *Tool Support for System Specification, Development and Verification*, Advances in Computing Sciences. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [MN01] F. Mesnard and U. Neumerkel. Applying static analysis techniques for inferring termination conditions of logic programs. In Cousot [Cou01], pages 93–110.
- [MRTT53] T. S. Motzkin, H. Raiffa, G. L. Thompson, and R. M. Thrall. The double description method. In H. W. Kuhn and A. W. Tucker, editors, *Contributions to the Theory of Games – Volume II*, number 28 in Annals of Mathematics Studies, pages 51–73. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1953.
- [NW88] G. L. Nemhauser and L. A. Wolsey. *Integer and Combinatorial Optimization*. Wiley Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. John Wiley & Sons, 1988.
- [Pit00] A. M. Pitts. Semantics of programming languages (for part IB of the computer science trips). Lecture Notes, 2000.
- [Pug92] W. Pugh. A practical algorithm for exact array dependence analysis. *Communications of the ACM*, 35(8):102–114, 1992.
- [SG96] H. Saglam and J. Gallagher. Static analysis of logic programs using clp as a meta-language. Technical Report CSTR-96-003, Department of Computer Science, University of Bristol, June 1996.
- [SIC02] Swedish Institute of Computer Science, Intelligent Systems Laboratory. *SICStus Prolog User’s Manual*, release 3.9 edition, 2002.
- [SW70] J. Stoer and C. Witzgall. *Convexity and Optimization in Finite Dimensions I*. Springer-Verlag, Berlin, 1970.
- [Tar55] A. Tarski. A lattice theoretical fixpoint theorem and its applications. *Pacific Journal of Mathematics*, 5:285–310, 1955.

- [Wey35] H. Weyl. Elementare theorie der konvexen polyeder. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 7:290–306, 1935. English translation in [Wey50].
- [Wey50] H. Weyl. The elementary theory of convex polyhedra. In H. W. Kuhn, editor, *Contributions to the Theory of Games – Volume I*, number 24 in Annals of Mathematics Studies, pages 3–18. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1950. Translated from [Wey35] by H. W. Kuhn.
- [Wil93] D. K. Wilde. A library for doing polyhedral operations. Master’s thesis, Oregon State University, Corvallis, Oregon, December 1993. Also published as IRISA *Publication interne* 785, Rennes, France, 1993.